тотчас же приводит к противоречию. Действительно, в области V, включающей в себя все пространство вне шара и нормальную зону образца, очевидно, $\operatorname{rot}\mathbf{B}=0$. Поэтому с учетом уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ имеем

$$\Delta\mathbf{B}=\nabla\operatorname{div}\mathbf{B}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}=0, \tag{31.10}$$

т. е. **B** является векторной гармонической функцией. В таком случае, согласно принципу максимума*, она должна принимать свои экстремальные значения на границах области V. В соответствии с результатами задачи **31.4** на границах V имеем

$$\max B=H_{\text{кр}},\quad \min B=0. \tag{31.11}$$

Но тогда всюду в области V справедливо неравенство $0\leqslant B\leqslant H_{\text{кр}}$, из которого следует, что заштрихованная область должна быть не нормальной, а сверхпроводящей.

Чтобы разрешить указанное противоречие, *Р. Пайерлс* и *Ф. Лондон* в 1936 г. высказали гипотезу, согласно которой в интервале (31.9) образец переходит в особое состояние, названное ими *промежуточным*. В этом состоянии весь образец распадается на очень мелкие чередующиеся нормальные и сверхпроводящие области, причем в нормальных областях $B=H_{\text{кр}}$, а в сверхпроводящих $B=0$. В 1937 г. *Л. Д. Ландау* сделал дальнейшее предположение о ламинарной структуре промежуточного состояния. Согласно Ландау, должны существовать отдельные нити в нормальном состоянии, пронизывающие толщу сверхпроводника параллельно друг другу и выходящие на поверхность образца. Вскоре такая структура действительно была обнаружена на опыте.

§ 32. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Рассмотрим ограниченную систему токов, погруженную в магнетик с проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$. Выделим некоторую область V_0 с границей S, включающую систему токов. Тогда [см. (14.7)] энергия магнитного поля, содержащаяся в V_0, равна

$$W_{\text{m}}=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_0}(\mathbf{BH})\,\mathrm{d}V. \tag{32.1}$$

Полагая $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ и применяя теорему Гаусса—Остроградского, с учетом тождества $\operatorname{div}[\mathbf{HA}]=(\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H})-(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{A})$ находим

$$W_{\text{m}}=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_0}(\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H})\,\mathrm{d}V-\frac{1}{8\pi}\oint\limits_{S}(\mathbf{n}[\mathbf{HA}])\,\mathrm{d}S. \tag{32.2}$$

Для ограниченной системы токов, согласно (29.9), асимптотическое поведение вектор-потенциала **A** при $r\to\infty$ имеет вид

$$\mathbf{A}=[\mathbf{mr}]/r^3,$$

где **m** — полный магнитный момент системы. Отсюда нетрудно получить следующую оценку для поверхностного интеграла в (32.2), приняв, что поверхность S представляет собой сферу

* См. *Приложение.*

как угодно большого радиуса R:

$$\frac{1}{8\pi}\left|\oint\limits_S (\mathbf{n}[\mathbf{HA}])\,\mathrm{d}S\right| = \frac{\mathbf{m}^2}{3\mu(R)R^3} + O\left(\frac{1}{R^4}\right). \tag{32.3}$$

Таким образом, при $R\to\infty$ поверхностный интеграл в (32.2) исчезает и выражение для энергии магнитного поля с учетом уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}/c$ принимает вид

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c}\int\limits_V (\mathbf{jA})\,\mathrm{d}V, \tag{32.4}$$

где V — область, занятая токами проводимости.

Замечая, что поле $\mathbf{B}$ создается как токами проводимости, так и токами намагничения, можно записать следующее уравнение для векторного потенциала $\mathbf{A}$:

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}+\mathbf{j}_{\mathrm{M}}).$$

Решение его [см. (28.8)] имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}'+\mathbf{j}'_{\mathrm{M}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V'. \tag{32.5}$$

Подставляя (32.5) в (32.4), получаем выражение для энергии магнитного поля постоянных токов:

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2c^2}\int\limits_V\int\limits_{V'} \frac{\mathbf{j}\cdot(\mathbf{j}'+\mathbf{j}'_{\mathrm{M}})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}V', \tag{32.6}$$

где V' — область, занятая токами проводимости и намагничения.

Для однородного магнетика с постоянной проницаемостью μ вместо (32.5), очевидно, имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int\limits_V \frac{\mathbf{j}'\,\mathrm{d}V'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{32.7}$$

и поэтому (32.6) упрощается:

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{2c^2}\int\limits_V\int\limits_V \frac{(\mathbf{jj}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}V'. \tag{32.8}$$

Интересно отметить далеко идущую аналогию между магнито- и электростатикой, которая, в частности, проявляется в сходстве формул (32.6) и (23.5), а также (32.8) и (23.6). В обоих случаях энергия взаимодействия элементарных токов или зарядов изменяется с расстоянием по закону $1/R$.

Обычно токи текут по проводникам, занимающим некоторые области V_1, V_2, ... В то же время из условия стационарности токов $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ вытекает, что линии тока являются замкнутыми. Выделяя области V_i, отвечающие полным токам I_i, можно положить $\mathbf{j}_i \equiv I_i \mathbf{f}_i(\mathbf{r})$ и переписать (32.8) в виде

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2c^2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k, \tag{32.9}$$

где введены коэффициенты

$$\mathrm{L}_{ik}=\mu\int\limits_{V_i}\int\limits_{V_k}\frac{(\mathbf{f}_i(\mathbf{r})\,\mathbf{f}_k(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}V', \tag{32.10}$$

называемые *взаимной индуктивностью* при $i\neq k$ и *индуктивностью* при $i=k$. Для квазилинейных проводников подстановкой $\mathbf{j}_i\mathrm{d}V=I_i\mathrm{d}\mathbf{l}$ каждый объемный интеграл в (32.10) сводится к линейному:

$$L_{ik}=\mu\oint\limits_{C_i}\oint\limits_{C_k}\frac{(\mathrm{d}\mathbf{l}_i\mathrm{d}\mathbf{l}_k)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|}. \tag{32.11}$$

Однако такое упрощение допустимо только при вычислении взаимной индуктивности L_{ik} непересекающихся квазилинейных проводников, когда $\mathbf{r}_i\neq\mathbf{r}_k$. В противном случае необходимо пользоваться общим выражением (32.10).

Задача 32.1. *Полагая в* (32.10) $\mathbf{f}_i=\operatorname{rot}\mathbf{g}_i$, *где* $\operatorname{div}\mathbf{g}_j=0$, *показать, что для* L_{ik} *справедливо представление*

$$L_{ik}=4\pi\mu\int\limits_V(\mathbf{g}_i\mathbf{g}_k)\,\mathrm{d}V. \tag{32.12}$$

Для квазилинейных проводников смысл коэффициентов L_{ik} становится особенно понятным. В самом деле, в этом случае, вводя магнитный поток Φ_i через контур C_i i-го проводника, находим

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2c}\int\limits_V(\mathbf{jA})\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2c}\sum_i\oint\limits_{C_i}I_i(\mathbf{A}\mathrm{d}\mathbf{l})\equiv\frac{1}{2c}\sum_i I_i\Phi_i. \tag{32.13}$$

Сравнение с формулой (32.9) показывает, что

$$\Phi_i=\frac{1}{c}\sum_k L_{ik}I_k\equiv\sum_k\Phi_{ik}, \tag{32.14}$$

где $\Phi_{ik}=L_{ik}I_k/c$ — магнитный поток, создаваемый током I_k и пронизывающий контур C_i. Таким образом, для квазилинейных проводников коэффициенты L_{ik} можно определять либо из энергии [см. (32.9)], либо из магнитного потока [см. (32.14)].

Задача 32.2. *Рассчитать индуктивность L тороидальной катушки, имеющей N витков. Максимальный и минимальный радиусы тороида равны соответственно b и a.*

Посмотрим теперь, как изменится выражение для энергии магнитного поля в присутствии сверхпроводников. Если сверхпроводящая область V односвязна, то внутри нее [см. (31.8)] $\mathbf{A}=\mathrm{const}$ и поэтому ее вклад в энергию равен

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2c}\int\limits_V(\mathbf{jA})\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2c}\mathbf{A}\int\limits_V\mathbf{j}\mathrm{d}V=0$$

на основании (29.6). Это означает, что односвязный сверхпроводник не может быть самостоятельным источником магнитного поля в полном соответствии с задачей **31.5**.

Допустим теперь, что сверхпроводящая область V многосвязна. Ясно, что, проведя достаточное число разрезов S_i, область V всегда можно сделать односвязной. В этом случае, полагая [см. (31.6)] $\mathbf{A}=\nabla\chi$, имеем

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2c}\int\limits_V(\mathbf{j}\nabla\chi)\,\mathrm{d}V=\sum_i\frac{1}{2c}\int\limits_{S_i}(\mathbf{nj})\,[\chi]_i\mathrm{d}S=\sum_i\frac{1}{2c}I_i\,[\chi]_i, \qquad (32.15)$$

где $[\chi]_i$ — скачок χ на разрезе S_i, I_i — сила тока через разрез S_i. Сравнение (32.15) с (32.13) показывает, что в квазилинейном случае скачок $[\chi]_i$ соответствует магнитному потоку Φ_i.

Задача 32.3. *Вычислить индуктивность L тонкого сверхпроводящего кольца радиуса a. Радиус сечения провода $r_0 \ll a$.*

Задача 32.4. *Тонкое сверхпроводящее кольцо находится в магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}_0$, перпендикулярной его плоскости. Найти зависимость силы тока I в кольце от напряженности H_0, меняющейся от нуля до критического значения $H_{\text{кр}}$ и затем вновь спадающей до нуля.*

Найдем еще выражение для энергии магнитного поля в присутствии постоянных магнитов. В этом случае уже нельзя полагать $w_{\mathrm{m}}=(\mathbf{BH})/(8\pi)$, поскольку $\mathbf{B}\neq\mu\mathbf{H}$. Рассматривая идеализированное приближение (30.14), для изменения плотности энергии магнитного поля, согласно (14.5), получим

$$\delta w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\delta\mathbf{B})=\frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\delta\mathbf{H})=\delta\left(\frac{\mu}{8\pi}H^2\right).$$

Таким образом, можно считать, что в случае идеализированных постоянных магнитов

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{\mu}{8\pi}H^2=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{BH})-\frac{1}{2}(\mathbf{M}_0\mathbf{H}) \qquad (32.16)$$

и полная энергия магнитного поля равна

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{BH})\,dV - \frac{1}{2}\int(\mathbf{M}_0\mathbf{H})\,dV. \quad (32.17)$$

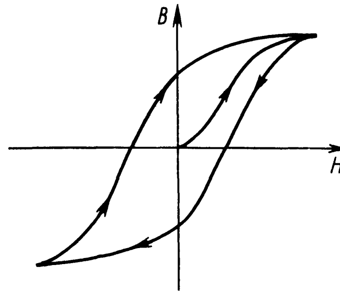

Рис. 32.1

Первый интеграл в (32.17), как и (32.1), сводится к (32.4) и исчезает, если $\mathbf{j}=0$, т. е. если поле создается лишь самим магнитом. Таким образом, полная энергия магнитного поля постоянных магнитов равна

$$W_m = -\frac{1}{2}\int(\mathbf{M}_0\mathbf{H})\,dV. \quad (32.18)$$

Нетрудно видеть, что $W_m > 0$, так как $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{H}$ антипараллельны.

Наконец, для *ферромагнетиков*, когда гистерезисные явления не позволяют ввести однозначную функцию $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, нельзя определить энергию магнитного поля. В этом случае можно лишь вычислять ее изменения. Замечая, что

$$4\pi\delta w_m = (\mathbf{H}\delta\mathbf{B}) = \delta(\mathbf{HB}) - (\mathbf{B}\delta\mathbf{H}),$$

при изменении напряженности поля от $\mathbf{H}_1$ до $\mathbf{H}_2$ получим следующее изменение энергии:

$$W_{m2} - W_{m1} = \frac{1}{4\pi}\int_V\left[(\mathbf{B}_2\mathbf{H}_2) - (\mathbf{B}_1\mathbf{H}_1) - \int_{\mathbf{H}_1}^{\mathbf{H}_2}(\mathbf{B}\delta\mathbf{H})\right]dV. \quad (32.19)$$

При возвращении в ту же точку, т. е. при обходе гистерезисной петли (рис. 32.1), в 1 см^3 ферромагнетика, согласно второму началу термодинамики, должно выделяться количество теплоты

$$\oint\delta w_m = -\frac{1}{4\pi}\oint(\mathbf{B}\delta\mathbf{H}) > 0. \quad (32.20)$$

Это происходит потому, что при перемагничивании домены поворачиваются, что сопровождается разрывом сцепления между ними, т. е. работой против сил «трения».

Задача 32.5. *Показать, что если в магнитное поле, созданное заданными постоянными токами, внести магнетик с проницаемостью, отличающейся на $\delta\mu$ от проницаемости окружающей среды, то изменение энергии поля равно*

$$\delta W_m = \frac{1}{8\pi}\int H^2\delta\mu\,dV. \quad (32.21)$$

Показать также, что при внесении сверхпроводника энергия поля уменьшается.