§ 33. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СВЕРХПРОВОДНИКИ И МАГНЕТИКИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Начнем с вычисления силы, действующей на сверхпроводник. Так как в объеме сверхпроводника $\mathbf{j}=0$, то исчезает и объемная плотность силы Лоренца $\mathbf{f}_{\mathrm{m}}=[\mathbf{jB}]/c=0$, тем более что внутри сверхпроводника $\mathbf{B}=0$. Поэтому ясно, что на сверхпроводник могут действовать лишь поверхностные силы. Очевидно, что поверхностная плотность силы Лоренца равна

$$\mathbf{t}=[\mathbf{iB}']/c, \tag{33.1}$$

где $\mathbf{i}=c\,[\mathbf{nH}]/(4\pi)$ — плотность поверхностного тока, $\mathbf{B}'$ — индукция действующего магнитного поля. Так как внутри сверхпроводника $\mathbf{B}=0$, то, повторяя рассуждения задачи **3.4**, нетрудно убедиться, что $\mathbf{B}'=\mathbf{B}/2$, где $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника, удовлетворяющая граничному условию $(\mathbf{nB})=0$. Таким образом,

$$\mathbf{t}=[\mathbf{iB}]/(2c)=-\mathbf{n}(\mathbf{BH})/(8\pi)\equiv-\mathbf{n}w_{\mathrm{m}}, \tag{33.2}$$

откуда видно, что сверхпроводник в магнитном поле испытывает поверхностное давление, численно равное плотности энергии магнитного поля (*магнитное давление*). Причину этого давления, очевидно, следует искать во взаимодействии поверхностных токов.

Для того чтобы найти силы, действующие в магнитном поле на магнетик, характеризующийся проницаемостью $\mu(\mathbf{r})$, воспользуемся соотношением (32.21). Как и в § 27, рассмотрим бесконечно малое смещение магнетика на вектор $\delta\mathbf{a}(\mathbf{r})$ в некоторой малой области V. Тогда из (32.21) по аналогии с (27.11) получим

$$\delta W_{\mathrm{m}}=-\frac{1}{8\pi}\int\limits_V H^2\left[(\delta\mathbf{a}\nabla\mu)+\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\operatorname{div}\delta\mathbf{a}\right]\mathrm{d}V. \tag{33.3}$$

Однако, как было выяснено в задаче **14.1**, энергия системы зарядов может измениться лишь за счет работы δA_{e} вихревого электрического поля, возникающего при смещении магнетика. Эта работа равна и противоположна по знаку работе δA_{m} магнитного поля над молекулярными токами. В итоге, приравнивая уменьшение энергии магнитного поля работе вихревого электрического поля, имеем

$$\delta W_{\mathrm{m}}=-\delta A_{\mathrm{e}}=\delta A_{\mathrm{m}}. \tag{33.4}$$

Вводя плотность сил $\mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{\text{связ}}$, действующих на магнетик в магнитном поле, можно записать

$$\delta A_{\mathrm{m}}=\int\limits_V(\mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{\text{связ}}\delta\mathbf{a})\,\mathrm{d}V. \tag{33.5}$$

Подставляя выражения (33.3) и (33.5) в (33.4), имеем

$$\mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{\text{связ}} = -\frac{H^2}{8\pi}\dot{\nabla}\mu + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}H^2\right), \tag{33.6}$$

что по структуре аналогично (27.14).

Для разреженных магнетиков, когда $\mu \approx 1 + c\tau \approx 1$ [см. (59.15)], формула (33.6) упрощается и принимает вид

$$\mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{\text{связ}} \approx (\mu - 1)\nabla H^2/(8\pi). \tag{33.7}$$

К этому выражению можно прийти и в микроскопической теории. В самом деле, из соотношения (33.4) следует, что если известно выражение для энергии W_{m} магнитного поля как функции некоторых обобщенных координат q_1, q_2, ..., то обобщенные силы F_i могут быть найдены по формуле

$$F_i = \partial W_{\mathrm{m}}/\partial q_i. \tag{33.8}$$

Задача 33.1. *Найти силу и момент сил, действующие на точечный магнитный момент* $\mathbf{m}$ *в магнитном поле* $\mathbf{B}_0$.

Представим теперь магнетик как совокупность молекул, обладающих магнитными моментами $\mathbf{m}_i$. Тогда плотность силы, действующей на магнетик в магнитном поле $\mathbf{B}$, следуя результату задачи **33.1**, равна

$$\mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{\text{связ}} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}(\mathbf{m}_i\nabla)\mathbf{B}_i. \tag{33.9}$$

Заменяя индукцию $\mathbf{B}_i$ действующего поля на среднюю индукцию $\mathbf{B}$, что допустимо для разреженных сред, и вводя намагниченность

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\mathbf{m}_i = \frac{\mu - 1}{4\pi}\mathbf{H},$$

из (33.9) с учетом тождества $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} = \nabla H^2/2$, справедливого при $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$, находим

$$\mathbf{f}_{\mathrm{m}}^{\text{связ}} = (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{B} \approx \mu(\mu - 1)\nabla H^2/(8\pi),$$

что согласуется с (33.7) для $\mu \approx 1$.

Нетрудно видеть, что в соответствии с (33.7) парамагнетики ($\mu > 1$) должны втягиваться в область сильнейшего магнитного поля, а диамагнетики ($\mu < 1$) — выталкиваться из этой области.

Наконец, в том случае, когда в магнетике текут токи проводимости, плотность сил, действующих на магнетик в магнитостатическом поле, очевидно, равна

$$\mathbf{f}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{c}[\mathbf{jB}] - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}H^2\right). \tag{33.10}$$

Поступая так же, как при решении задачи **13.1**, иногда бывает удобно представить (33.10) в виде

$$\mathbf{f}_{\mathrm{m}} = \operatorname{div} \hat{\mathrm{T}}_{(\mathrm{m})}, \tag{33.11}$$

где $\hat{\mathrm{T}}_{(\mathrm{m})}$ — тензор магнитных натяжений, имеющий компоненты

$$T^{ik}_{(\mathrm{m})} = \frac{\mu}{4\pi} H^i H^k - \frac{H^2}{8\pi}\left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)\delta^{ik}. \tag{33.12}$$

С помощью формулы (33.11) полную силу, действующую на магнетик, занимающий некоторую область V, можно свести к поверхностному интегралу по границе S области:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = \oint\limits_S \left[\frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{nH})\,\mathbf{H} - \frac{H^2}{8\pi}\left(\mu - \tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right)\mathbf{n}\right]\mathrm{d}S. \tag{33.13}$$

§ 34. СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

До сих пор мы считали токи проводимости заданными, не останавливаясь на причинах того, как практически можно поддерживать их неизменными во времени. Однако ясно, что в проводящей среде, в которой, согласно закону Джоуля — Ленца (14.3), происходит постоянное выделение теплоты, стационарный ток может поддерживаться лишь сторонними электродвижущими силами. Вводя напряженность $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ поля этих сторонних сил, запишем основные уравнения, определяющие плотность тока $\mathbf{j}$ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в среде, характеризуемой электропроводимостью $\sigma(\mathbf{r})$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}\right), \quad \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{34.1}$$

Как и в электростатике, решение уравнений (34.1) сводится к отысканию потенциала φ, поскольку уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ удовлетворяется подстановкой $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В итоге система (34.1) сводится к одному уравнению

$$\operatorname{div}\left[\sigma\left(-\nabla\varphi + \mathbf{E}^{\text{стор}}\right)\right] = 0, \tag{34.2}$$

тогда как уравнение $\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho$ используется для определения плотности свободного заряда ρ уже после того, как найдено электрическое поле $\mathbf{E}$. Ясно, что любая задача магнитостатики, сводящаяся к решению уравнения (34.2), аналогична соответствующей электростатической задаче, ибо получается из последней заменами:

$$\varepsilon \to \sigma, \quad \mathbf{D} \to -\sigma\nabla\varphi, \quad 4\pi\rho \to -\operatorname{div}\left(\sigma\mathbf{E}^{\text{стор}}\right). \tag{34.3}$$

Как уже отмечалось, для обычных проводников при не очень большой напряженности $\mathbf{E}$ поля электропроводимость σ можно считать не зависящей от $\mathbf{E}$. В простейшем частном случае однородных проводников σ является постоянной в каждой точке