Поступая так же, как при решении задачи **13.1**, иногда бывает удобно представить (33.10) в виде

$$\mathbf{f}_{\mathrm{m}} = \operatorname{div} \hat{\mathrm{T}}_{(\mathrm{m})}, \tag{33.11}$$

где $\hat{\mathrm{T}}_{(\mathrm{m})}$ — тензор магнитных натяжений, имеющий компоненты

$$T^{ik}_{(\mathrm{m})} = \frac{\mu}{4\pi} H^i H^k - \frac{H^2}{8\pi}\left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)\delta^{ik}. \tag{33.12}$$

С помощью формулы (33.11) полную силу, действующую на магнетик, занимающий некоторую область V, можно свести к поверхностному интегралу по границе S области:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{m}} = \oint\limits_S \left[\frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{nH})\,\mathbf{H} - \frac{H^2}{8\pi}\left(\mu - \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)\mathbf{n}\right] \mathrm{d}S. \tag{33.13}$$

§ 34. СТАЦИОНАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

До сих пор мы считали токи проводимости заданными, не останавливаясь на причинах того, как практически можно поддерживать их неизменными во времени. Однако ясно, что в проводящей среде, в которой, согласно закону Джоуля — Ленца (14.3), происходит постоянное выделение теплоты, стационарный ток может поддерживаться лишь сторонними электродвижущими силами. Вводя напряженность $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ поля этих сторонних сил, запишем основные уравнения, определяющие плотность тока $\mathbf{j}$ и напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в среде, характеризуемой электропроводимостью $\sigma(\mathbf{r})$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}\right), \quad \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{34.1}$$

Как и в электростатике, решение уравнений (34.1) сводится к отысканию потенциала φ, поскольку уравнение $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ удовлетворяется подстановкой $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В итоге система (34.1) сводится к одному уравнению

$$\operatorname{div}\left[\sigma\left(-\nabla\varphi + \mathbf{E}^{\text{стор}}\right)\right] = 0, \tag{34.2}$$

тогда как уравнение $\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho$ используется для определения плотности свободного заряда ρ уже после того, как найдено электрическое поле $\mathbf{E}$. Ясно, что любая задача магнитостатики, сводящаяся к решению уравнения (34.2), аналогична соответствующей электростатической задаче, ибо получается из последней заменами:

$$\varepsilon \to \sigma, \quad \mathbf{D} \to -\sigma\nabla\varphi, \quad 4\pi\rho \to -\operatorname{div}\left(\sigma\mathbf{E}^{\text{стор}}\right). \tag{34.3}$$

Как уже отмечалось, для обычных проводников при не очень большой напряженности $\mathbf{E}$ поля электропроводимость σ можно считать не зависящей от $\mathbf{E}$. В простейшем частном случае однородных проводников σ является постоянной в каждой точке

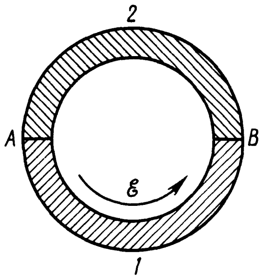

Рис. 34.1

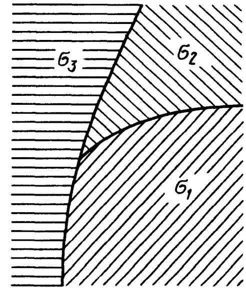

Рис. 34.2

заданного проводника, и тогда уравнение (34.2) сводится к следующему:

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{E}^{\text{стор}}, \tag{34.4}$$

т. е. к уравнению Пуассона с плотностью «сторонних» зарядов

$$\rho^{\text{стор}} = -\operatorname{div} \mathbf{E}^{\text{стор}}/(4\pi). \tag{34.5}$$

Весьма распространен класс сторонних сил, для которых в отдельных областях можно ввести сторонний потенциал, т. е. положить

$$\mathbf{E}^{\text{стор}} = -\nabla\varphi^{\text{стор}}. \tag{34.6}$$

Примером таких сил могут служить диффузионные силы $\mathbf{E}^{\text{стор}} = \alpha\nabla\tau$, термоэлектрические силы $\mathbf{E}^{\text{стор}} = \beta\nabla T$ и др. Используя (34.6), вместо (34.4) в соответствующих областях найдем

$$\Delta(\varphi + \varphi^{\text{стор}}) = 0. \tag{34.7}$$

Очевидно, что во всем пространстве соотношение (34.6) не может выполняться, поскольку циркуляция $\mathbf{E}^{\text{стор}}$ по любому замкнутому контуру, т. е. сторонняя э. д. с., оказалась бы тогда равной нулю. В качестве примера возьмем термоэлектрические силы $\mathbf{E}^{\text{стор}} = \beta\nabla T$. Пусть замкнутая цепь C образована двумя кусками разных металлов *1* и *2*, спаи которых A и B нагреты до температур T_A и T_B соответственно (рис. 34.1). Характеризуя каждый металл своей постоянной β, для сторонней э. д. с. находим выражение

$$\mathscr{E} = \oint_C \beta \, dT = (T_B - T_A)(\beta_1 - \beta_2) \neq 0.$$

В большинстве практических задач приходится определять потенциал φ и плотность тока $\mathbf{j}$ в системе однородных проводников с электропроводимостями σ_i, соприкасающихся по некоторым границам раздела (рис. 34.2). При этом сторонние э. д. с.

появляются лишь на границах раздела, исчезая в толще проводников. Поэтому внутри проводников и граничащих с ними однородных диэлектриков выполняется уравнение Лапласа $\Delta\varphi=0$. При сшивании решений в разных областях необходимо использовать граничные условия, вытекающие из (34.1). Так, уравнение $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0$ приводит к граничному условию

$$[\mathbf{nE}_2]=[\mathbf{nE}_1], \tag{34.8}$$

которое (см. § 22) эквивалентно условию непрерывности потенциала φ или условию $\varphi_1-\varphi_2=\mathrm{const}$. Уравнение $\mathrm{div}\,\mathbf{j}=0$ приводит к граничному условию

$$(\mathbf{nj}_2)=(\mathbf{nj}_1), \tag{34.9}$$

т. е. к непрерывности нормальной составляющей тока.

Задача 34.1. *Найти поверхностную плотность свободного заряда и закон преломления линий тока на границе двух сред с удельными проводимостями* σ_1, σ_2 *и диэлектрическими проницаемостями* ε_1, ε_2.

Наконец, третье условие получается из уравнения

$$\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}^{\text{стор}}-\nabla\varphi) \tag{34.10}$$

интегрированием вдоль линии, перпендикулярной поверхности раздела S (рис. 34.3). С учетом (34.9) находим

$$\varphi_1-\varphi_2+\int\limits_1^2(\mathbf{E}^{\text{стор}}\mathrm{d}\mathbf{l})=\int\limits_1^2(\mathbf{nj})\frac{\mathrm{d}l}{\sigma}=(\mathbf{nj})\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}l}{\sigma}. \tag{34.11}$$

Устремляя точки *1* и *2* друг к другу и вводя сопротивление

$$R_{12}\equiv\left\{\int\limits_S\left[\int\limits_1^2\frac{\mathrm{d}l}{\sigma}\right]^{-1}\mathrm{d}S\right\}^{-1} \tag{34.12}$$

поверхности раздела по отношению к протекающему нормально ей току I, перепишем (34.11) в виде

$$IR_{12}=\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{12}, \tag{34.13}$$

где введена сторонняя э. д. с.

$$\mathscr{E}_{12}=\int\limits_1^2(\mathbf{E}^{\text{стор}}\mathrm{d}\mathbf{l}). \tag{34.14}$$

При этом предполагается, что $\mathscr{E}_{12}$ постоянна на поверхности S. Обычно это условие хорошо выполняется для квазилинейных проводников, в сечении которых $\mathscr{E}_{12}$ меняется весьма незначительно.

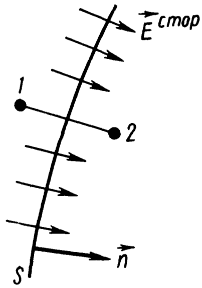

Рис. 34.3

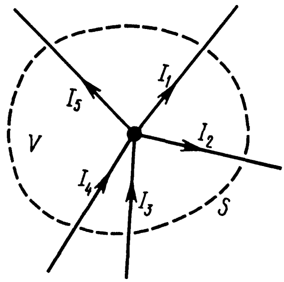

Рис. 34.4

Суммируя соотношение (34.13) для ряда последовательных участков некоторой квазилинейной цепи, получаем *второй закон Кирхгофа* для участка цепи:

$$\sum_k I_k R_k = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_k \mathscr{E}_k. \tag{34.15}$$

В частном случае замкнутой цепи, полагая $\varphi_1 = \varphi_2$, находим

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathscr{E}_k \equiv \mathscr{E}. \tag{34.16}$$

Если цепь изолирована и имеет полное сопротивление R, то получаем закон Ома $\mathscr{E} = IR$.

Наконец, если проинтегрировать уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ по некоторой малой области V, в которой сходятся несколько квазилинейных проводников (рис. 34.4), то с помощью теоремы Гаусса — Остроградского найдем

$$\oint_S (\mathbf{nj})\, dS = \sum_k I_k = 0, \tag{34.17}$$

где S — граница области V. Соотношение (34.17) называется *первым законом Кирхгофа* и, очевидно, выражает закон сохранения электрического заряда.

Полученные выше граничные условия имеют разный вид на поверхностях раздела проводник — проводник и проводник — диэлектрик. В первом случае уравнения (34.8) и (34.10) при дополнительном предположении

$$\mathbf{E}_{1,2}^{\text{стор}} = 0, \tag{34.18}$$

означающем, что сторонние силы действуют только на границе, приводят к скачку касательной составляющей плотности тока на границе:

$$[\mathbf{nj}_1]/\sigma_1 = [\mathbf{nj}_2]/\sigma_2. \tag{34.19}$$

Из условия (34.9) находим

$$(\mathbf{nj})=\sigma_1(\mathbf{nE}_1)=\sigma_2(\mathbf{nE}_2), \tag{34.20}$$

что позволяет [см. (22.5)] выразить поверхностную плотность заряда на границе через нормальную плотность тока:

$$\eta=\frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon_2(\mathbf{nE}_2)-\varepsilon_1(\mathbf{nE}_1)\right]=\frac{(\mathbf{nj})}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right). \tag{34.21}$$

В случае границы проводник — диэлектрик $(\mathbf{nj})=0$, откуда с учетом (22.6) находим

$$(\mathbf{nE}^{\text{пров}})=0, \quad \varepsilon(\mathbf{nE}^{\text{диэл}})=4\pi\eta. \tag{34.22}$$

В то же время из условия (34.8) следует, что

$$[\mathbf{nE}^{\text{диэл}}]=[\mathbf{nE}^{\text{пров}}]=\frac{1}{\sigma}[\mathbf{nj}]. \tag{34.23}$$

§ 35. СИСТЕМА ИДЕАЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ В СРЕДЕ С МАЛОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Рассмотрим систему хороших проводников-электродов с удельной проводимостью $\sigma_0\to\infty$, погруженных в плохо проводящую среду с удельной проводимостью $\sigma\ll\sigma_0$. В этом случае определение потенциала φ в проводящей среде сводится к основной задаче электростатики. В самом деле, поверхностная плотность заряда на электродах [см. (34.21)] равна

$$\eta=\frac{(\mathbf{nj})}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}-\frac{\varepsilon_0}{\sigma_0}\right)\approx\frac{\varepsilon(\mathbf{nj})}{4\pi\sigma}=\frac{\varepsilon(\mathbf{nE})}{4\pi}, \tag{35.1}$$

как и в электростатике. Кроме того, токи I_i, стекающие с электродов, обычно бывают известны, поэтому плотность тока $\mathbf{j}$ является ограниченной величиной, порядок которой $j\sim I_i/S_i$, где S_i — площадь поверхности электрода. Отсюда следует, что внутри электродов напряженность поля оказывается исчезающе малой, т. е.

$$E\sim I_i/(\sigma_0 S_i)\to 0,$$

и потенциал можно считать постоянным:

$$\varphi=\varphi_i=\mathrm{const}_i. \tag{35.2}$$

При этом силы токов I_i, стекающих с электродов, зависят от напряженности поля в окружающей среде:

$$I_i=\oint\limits_{S_i}(\mathbf{nj})\,\mathrm{d}S=\oint\limits_{S_i}\sigma(\mathbf{nE})\,\mathrm{d}S. \tag{35.3}$$

Таким образом, задача нахождения потенциала φ в проводящей среде сводится к решению уравнения $\operatorname{div}(\sigma\nabla\varphi)=0$ с гранич-