Из условия (34.9) находим

$$(\mathbf{nj}) = \sigma_1 (\mathbf{nE}_1) = \sigma_2 (\mathbf{nE}_2), \tag{34.20}$$

что позволяет [см. (22.5)] выразить поверхностную плотность заряда на границе через нормальную плотность тока:

$$\eta = \frac{1}{4\pi} [\varepsilon_2 (\mathbf{nE}_2) - \varepsilon_1 (\mathbf{nE}_1)] = \frac{(\mathbf{nj})}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right). \tag{34.21}$$

В случае границы проводник — диэлектрик $(\mathbf{nj}) = 0$, откуда с учетом (22.6) находим

$$(\mathbf{nE}^{\text{пров}}) = 0, \quad \varepsilon (\mathbf{nE}^{\text{диэл}}) = 4\pi\eta. \tag{34.22}$$

В то же время из условия (34.8) следует, что

$$[\mathbf{nE}^{\text{диэл}}] = [\mathbf{nE}^{\text{пров}}] = \frac{1}{\sigma} [\mathbf{nj}]. \tag{34.23}$$

§ 35. СИСТЕМА ИДЕАЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ В СРЕДЕ С МАЛОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Рассмотрим систему хороших проводников-электродов с удельной проводимостью $\sigma_0 \to \infty$, погруженных в плохо проводящую среду с удельной проводимостью $\sigma \ll \sigma_0$. В этом случае определение потенциала φ в проводящей среде сводится к основной задаче электростатики. В самом деле, поверхностная плотность заряда на электродах [см. (34.21)] равна

$$\eta = \frac{(\mathbf{nj})}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} - \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \right) \approx \frac{\varepsilon (\mathbf{nj})}{4\pi\sigma} = \frac{\varepsilon (\mathbf{nE})}{4\pi}, \tag{35.1}$$

как и в электростатике. Кроме того, токи I_i, стекающие с электродов, обычно бывают известны, поэтому плотность тока $\mathbf{j}$ является ограниченной величиной, порядок которой $j \sim I_i/S_i$, где S_i — площадь поверхности электрода. Отсюда следует, что внутри электродов напряженность поля оказывается исчезающе малой, т. е.

$$E \sim I_i/(\sigma_0 S_i) \to 0,$$

и потенциал можно считать постоянным:

$$\varphi = \varphi_i = \text{const}_i. \tag{35.2}$$

При этом силы токов I_i, стекающих с электродов, зависят от напряженности поля в окружающей среде:

$$I_i = \oint_{S_i} (\mathbf{nj})\, dS = \oint_{S_i} \sigma (\mathbf{nE})\, dS. \tag{35.3}$$

Таким образом, задача нахождения потенциала φ в проводящей среде сводится к решению уравнения $\operatorname{div}(\sigma\nabla\varphi) = 0$ с граничными условиями (35.1)—(35.3). Но в § 22 для этой задачи была доказана теорема единственности, по которой потенциал φ однозначно определяется либо заданием потенциалов электродов φ_i, либо заданием стекающих с них токов I_i*. В связи с этим ясно, что между силами токов I_i и потенциалами φ_i должна существовать линейная связь, аналогичная связи зарядов Q_i и потенциалов φ_i в электростатике:

$$\varphi_i=\sum_k R_{ik}I_k. \tag{35.4}$$

Коэффициенты R_{ik}, определяемые геометрией электродов и удельной проводимостью среды $\sigma(\mathbf{r})$, называются *коэффициентами сопротивления*.

Задача 35.1. *Показать, что обратная матрица сопротивления R_{ik}^{-1} для случая проводящей среды, характеризуемой тензором проводимости $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$, может быть представлена в виде*

$$R_{ii}^{-1}=b_{i0}+\sum_{k\neq i} b_{ik},\quad R_{ik}^{-1}=-b_{ik},\quad i\neq k, \tag{35.5}$$

где

$$b_{ik}=\int\Big[\int_{j_{ik}} f(\mathbf{r})\left(\tau\cdot\hat{\sigma}^{-1}\cdot\tau\right)\mathrm{d}l\Big]^{-1}\mathrm{d}S_i, \tag{35.6}$$

а интеграл берется по всем линиям тока, соединяющим электроды номеров i и k. Смысл обозначений разъяснен в задаче **24.1**.

Если среда однородна и изотропна, т. е. ее электропроводимость σ и диэлектрическая проницаемость ε постоянны, то сила стекающего с электрода тока может быть выражена через заряд электрода:

$$I_i=\sigma\oint_{S_i}(\mathbf{nE})\,\mathrm{d}S=\frac{\sigma}{\varepsilon}\oint_{S_i}(\mathbf{nD})\,\mathrm{d}S=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}Q_i. \tag{35.7}$$

Подставляя (35.7) в (35.4), находим

$$\varphi_i=\sum_k\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}R_{ik}Q_k. \tag{35.8}$$

Сравнение (35.8) с (24.3) показывает, что коэффициенты сопротивления для однородной среды оказываются пропорциональными потенциальным коэффициентам S_{ik}:

$$R_{ik}=\varepsilon S_{ik}/(4\pi\sigma). \tag{35.9}$$

Рассмотрим теперь важный случай двух проводников-электродов. Задавая силу токов $I_1=-I_2\equiv I$, мы предполагаем, что

---

* В последнем случае потенциал вычисляется с точностью до постоянной.

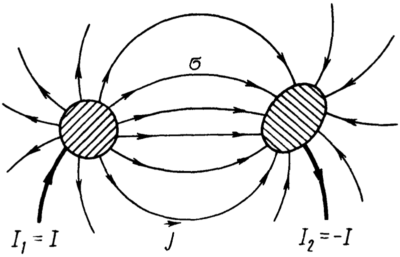

Рис. 35.1

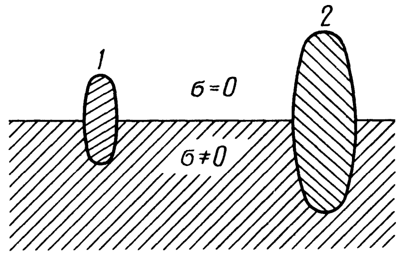

Рис. 35.2

проводники имеют «стоки» (рис. 35.1). Используя соотношение (35.4), нетрудно найти, что в данном случае

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I(R_{11} - 2R_{12} + R_{22}) \equiv IR, \tag{35.10}$$

что по форме совпадает с законом Ома. Введенная здесь величина

$$R \equiv R_{11} - 2R_{12} + R_{22} \tag{35.11}$$

называется *полным сопротивлением* системы двух электродов. Нетрудно видеть, что в однородной среде сопротивление системы [см. (35.9)] обратно пропорционально ее емкости:

$$R = \varepsilon/(4\pi\sigma C). \tag{35.12}$$

Если электроды *1* и *2* заземлены и поверхность земли является плоскостью симметрии системы (рис. 35.2), то вместо (35.12) имеем

$$R = \varepsilon/(2\pi\sigma C). \tag{35.13}$$

В заключение подсчитаем тепловую мощность, выделяемую в проводящей среде при наличии системы идеальных проводников-электродов. Если проводящая среда занимает область V, то выделяемая тепловая мощность (14.4) равна

$$P = \int_V \sigma E^2 \mathrm{d}V = \int_V (\mathbf{jE})\,\mathrm{d}V. \tag{34.14}$$

Делая подстановку $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и интегрируя (34.14) по частям, находим с учетом уравнения $\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$ и граничного условия (35.2)

$$P = -\int_V (\mathbf{j}\nabla\varphi)\,\mathrm{d}V = \sum_i \oint_{S_i} (\mathbf{nj})\,\varphi \mathrm{d}S =$$

$$= \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} (\mathbf{nj})\,\mathrm{d}S = \sum_i \varphi_i I_i = \sum_{i,k} R_{ik} I_i I_k. \tag{35.15}$$

Полученная квадратичная форма должна быть положительна, откуда вытекают полезные ограничения на коэффициенты R_{ik}, т. е.

$$R_{ii} > 0, \quad R_{ii} R_{kk} - (R_{ik})^2 > 0, \tag{35.16}$$

а также еще одно важное представление этих коэффициентов:

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial I_i \partial I_k}=R_{ki}. \tag{35.17}$$

Задача 35.2. *Показать, что в проводящей среде распределение токов, стекающих с идеальных электродов, таково, что тепловыделение минимально.*

§ 36. ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ И ПРЕВРАЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Поставим задачу об определении поля бесконечного цилиндрического проводника с током. Ее можно рассматривать как идеализацию реальной задачи, в которой проводник с током является замкнутым и в некоторой его части включена сторонняя э. д. с. Пусть проводник находится в вакууме, имеет радиус a и постоянную электропроводимость σ. Выберем цилиндрические координаты, направив ось Z вдоль проводника. Тогда простейшим решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим условию $E_r=0$ внутри проводника, является

$$\varphi(r<a)\equiv\varphi_1=-Ez,\quad j=j_z=\sigma E,\quad E=\mathrm{const}, \tag{36.1}$$

т. е. напряженность $\mathbf{E}$ поля и плотность тока $\mathbf{j}$ постоянны внутри проводника и направлены вдоль его оси. Потенциал вне провода $\varphi(r>a)\equiv\varphi_2$ также должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}=0 \tag{36.2}$$

и граничному условию при $r=a$

$$\varphi_2=\varphi_1=-Ez. \tag{36.3}$$

Из (36.3) выводим, что $\varphi_2=-Ezf(r)$, где $f(a)=1$. Поэтому из (36.2) следует, что $f(r)$ удовлетворяет уравнению $(rf')'=0$ с очевидным решением

$$f(r)=(\ln r+C)/(\ln a+C),$$

где C — произвольная постоянная. Полагая $C=-\ln r_0$, получаем окончательное выражение для потенциала вне провода:

$$\varphi_2=-Ez\frac{\ln(r/r_0)}{\ln(a/r_0)}. \tag{36.4}$$

Таким образом, появляется некоторая поверхность $r=r_0$, где $\varphi=0$. Физически она соответствует поверхности проводника, по которому течет обратный ток. Появление этой поверхности — одно из следствий идеализации задачи, т. е. предположения о бесконечности провода. По сути дела, решение (36.4) описывает потенциал в коаксиальном кабеле: по его внутренней жиле