а также еще одно важное представление этих коэффициентов:

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial I_i \partial I_k}=R_{ki}. \tag{35.17}$$

Задача 35.2. *Показать, что в проводящей среде распределение токов, стекающих с идеальных электродов, таково, что тепловыделение минимально.*

§ 36. ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА С ТОКОМ И ПРЕВРАЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Поставим задачу об определении поля бесконечного цилиндрического проводника с током. Ее можно рассматривать как идеализацию реальной задачи, в которой проводник с током является замкнутым и в некоторой его части включена сторонняя э. д. с. Пусть проводник находится в вакууме, имеет радиус a и постоянную электропроводимость σ. Выберем цилиндрические координаты, направив ось Z вдоль проводника. Тогда простейшим решением уравнения Лапласа, удовлетворяющим условию $E_r=0$ внутри проводника, является

$$\varphi(r<a)\equiv\varphi_1=-Ez,\quad j=j_z=\sigma E,\quad E=\text{const}, \tag{36.1}$$

т. е. напряженность $\mathbf{E}$ поля и плотность тока $\mathbf{j}$ постоянны внутри проводника и направлены вдоль его оси. Потенциал вне провода $\varphi(r>a)\equiv\varphi_2$ также должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}=0 \tag{36.2}$$

и граничному условию при $r=a$

$$\varphi_2=\varphi_1=-Ez. \tag{36.3}$$

Из (36.3) выводим, что $\varphi_2=-Ezf(r)$, где $f(a)=1$. Поэтому из (36.2) следует, что $f(r)$ удовлетворяет уравнению $(rf')'=0$ с очевидным решением

$$f(r)=(\ln r+C)/(\ln a+C),$$

где C — произвольная постоянная. Полагая $C=-\ln r_0$, получаем окончательное выражение для потенциала вне провода:

$$\varphi_2=-Ez\frac{\ln(r/r_0)}{\ln(a/r_0)}. \tag{36.4}$$

Таким образом, появляется некоторая поверхность $r=r_0$, где $\varphi=0$. Физически она соответствует поверхности проводника, по которому течет обратный ток. Появление этой поверхности — одно из следствий идеализации задачи, т. е. предположения о бесконечности провода. По сути дела, решение (36.4) описывает потенциал в коаксиальном кабеле: по его внутренней жиле

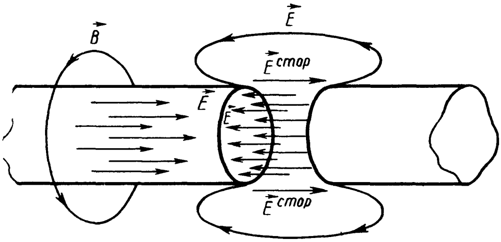

Рис. 36.1

(радиуса a) течет прямой ток, а по внешней оболочке (радиуса r_0) — обратный.

Из (36.4) с помощью (34.22) находим распределение поверхностного заряда на проводе:

$$\eta = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{Ez}{4\pi a \ln(a/r_0)}. \tag{36.5}$$

Следовательно, заряд распределен симметрично относительно плоскости $z=0$.

В решении был исключен из рассмотрения участок провода со сторонней э. д. с. Предположим, что она действует в некотором сечении провода на малом участке длиной Δl. Тогда на этом сечении потенциал испытывает скачок $IR_{12}-\mathscr{E}_{12}$. Пренебрегая сопротивлением участка ($R_{12}\to 0$), можно считать, что

$$[\varphi]_{12} \approx -\mathscr{E}_{12} = -E^{\text{стор}}\Delta l. \tag{36.6}$$

Участок с э. д. с. подобен конденсатору, в котором вектор напряженности **E** имеет противоположное по сравнению с другими частями проводника направление. Картина такого поля изображена на рис. 36.1.

В то же время линии индукции представляют собой систему колец с центрами на оси проводника. Следовательно, на поверхности провода вектор Пойнтинга направлен внутрь проводника и равен

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi}EB = \frac{c}{4\pi}\frac{j}{\sigma}\frac{2I}{ca} = \frac{j^2 a}{2\sigma}. \tag{36.7}$$

Поэтому на длину l провода приходится поток электромагнитной энергии

$$|\mathbf{S}|\,2\pi a l = \pi a^2 l j^2/\sigma,$$

равный тепловой мощности, рассеиваемой в объеме $V=\pi a^2 l$ провода в согласии с законом Джоуля — Ленца. Однако в области действия сторонней э. д. с. вектор электрической напряженности имеет противоположное направление при неизменности вектора магнитной индукции. Поэтому на этом участке вектор Пойнтинга направлен от проводника наружу. Таким образом, область действия сторонней э. д. с. является источником энергии, которая впоследствии поглотится в толще проводника. Для замкнутого проводника картина векторных линий вектора Пойнтинга **S** изображена на рис. 36.2.

Проведенный анализ этой задачи обнаруживает ошибочность распространенного мнения, будто энергия переносится движущимися электронами вдоль провода с током. На самом деле она поступает в проводник из окружающего его пространства в виде энергии электромагнитного поля. При этом источником электромагнитной энергии, из которого она поступает в окружающее пространство, является область действия сторонней э. д. с. Таким образом, электромагнитная энергия переносится от источника тока к омическим сопротивлениям, где она превращается в теплоту, не по проводу, а в свободном пространстве*.

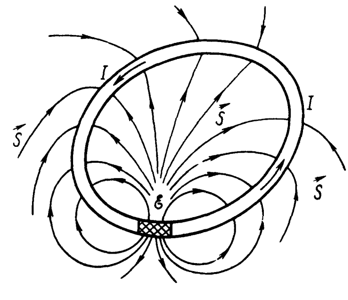

Рис. 36.2

Задача 36.1. *Как изменятся результаты данного параграфа, если учесть, что на движущиеся в проводнике электроны кроме электрического поля* **E** *действует также и магнитное поле тока?*

§ 37. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ОМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОВОДНИКОВ

Электрический ток в проводящей среде образуется движущимися электронами и ионами. Следуя определению плотности тока

$$\mathbf{j}=\frac{1}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V} e_i\mathbf{v}_i$$

и считая для простоты, что носителями тока являются положительно заряженные ионы с зарядом e_+ и отрицательно заряженные электроны (или ионы) с зарядом e_-, находим

$$\mathbf{j}=\frac{e_+}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\mathbf{v}_i^+ + \frac{e_-}{\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\mathbf{v}_i^- . \tag{37.1}$$

Вводя среднюю скорость зарядов

$$\mathbf{v}^{\pm}=\frac{1}{N_{\pm}\Delta V}\sum_{i\in\Delta V}\mathbf{v}_i^{\pm},$$

где $N_{\pm}$ — средняя концентрация частиц, имеем

$$\mathbf{j}=e_+N_+\mathbf{v}^+ + e_-N_-\mathbf{v}^- . \tag{37.2}$$

При не слишком большой напряженности **E** средняя скорость ионов линейно зависит от приложенного поля (закон Ома), т. е.

$$\mathbf{v}^{\pm}=\beta_{\pm}\mathbf{E}, \tag{37.3}$$

* При этом энергия поля передается сначала электронам в процессе их ускорения, а от них в результате столкновений — атомам.