3

ГЛАВА

ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Предсказание электромагнитных волн является самым впечатляющим достижением электродинамики Максвелла. В этой главе изучается структура решений уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное излучение, порождаемое самыми различными источниками: одиночным произвольно движущимся зарядом, электрическим и магнитным вибраторами Герца, линейной антенной. Исследуется обратная реакция электромагнитного излучения на источник и обсуждается проблема начальных условий в задачах электродинамики. Фундаментальную роль при этом играет физический принцип причинности, выделяющий направление времени.

§ 38. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ИЛИ ВАКУУМЕ

Перейдем к изучению наиболее общего случая изменяющихся во времени электромагнитных полей, подчиняющихся системе уравнений Максвелла (10.1) в однородной среде с постоянными ε и μ (или в вакууме, если $\varepsilon=\mu=1$). Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\quad \operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}.$$

Сначала рассмотрим электромагнитное поле в той области пространства, где отсутствуют свободные токи и заряды. Тогда выполняются уравнения:

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{D}=0,\quad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}.\end{aligned}\tag{38.1}$$

С учетом постоянства ε и μ перепишем эти уравнения в таком виде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\ (1)\qquad \operatorname{div}\mathbf{E}=0,\ (3)$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\ (2)\qquad \operatorname{div}\mathbf{H}=0.\ (4) \tag{38.2}$$

Дифференцируя первое из уравнений (38.2) по t, имеем

$$\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2},$$

или с учетом второго уравнения

$$-\frac{c}{\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Так как $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$, то $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=\nabla\operatorname{div}\mathbf{E}-\Delta\mathbf{E}=-\Delta\mathbf{E}$ и поэтому

$$\Delta\mathbf{E}-\frac{1}{v_\text{ф}^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0, \tag{38.3}$$

где

$$v_\text{ф}=c/\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{38.4}$$

Таким образом, мы получили *волновое уравнение*, описывающее распространение волн со скоростью $v_\text{ф}$. Нетрудно убедиться, что вектор **H** подчиняется такому же уравнению

$$\Delta\mathbf{H}-\frac{1}{v_\text{ф}^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0. \tag{38.5}$$

Итак, можно сказать, что любая компонента векторов **E**, **H** подчиняется общему волновому уравнению

$$\Delta\psi-\frac{1}{v_\text{ф}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0. \tag{38.6}$$

Решение этого уравнения записывается наиболее просто в случае, когда ψ зависит лишь от x и t. Тогда уравнение (38.6) сводится к следующему:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v_\text{ф}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi=0. \tag{38.7}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{v_\text{ф}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v_\text{ф}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v_\text{ф}}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

сделаем замену переменных $\xi=x-v_\text{ф}t$, $\eta=x+v_\text{ф}t$, в соответствии с которой

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v_\text{ф}}\frac{\partial}{\partial t}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v_\text{ф}}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

и (38.7) принимает вид $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=0.$

Отсюда следует, что общим решением волнового уравнения (38.7) является функция

$$\psi(t, x)=f_1(\xi)+f_2(\eta)=f_1(x-v_\Phi t)+f_2(x+v_\Phi t), \tag{38.8}$$

где f_1, f_2 — произвольные функции. Полученное решение представляет собой суперпозицию двух возмущений, распространяющихся соответственно вправо и влево со скоростью v_Φ.

Для электромагнитных волн в вакууме уравнение (38.6) принимает вид *уравнения Даламбера*

$$\Box\psi=0, \tag{38.9}$$

где введен *оператор Даламбера* $\Box\equiv\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Изучим свойства решений уравнения Даламбера в трехмерном случае в некоторой области V. Прежде всего докажем, что всякое решение уравнения Даламбера однозначно определяется заданием в начальный момент времени $t=0$ двух функций (ψ и $\partial\psi/\partial t$), а также заданием на границе области S для $t>0$ либо функции ψ, либо $(\mathbf{n}\nabla)\psi$. В самом деле, предположим, что это не так и что найдутся два различных решения уравнения Даламбера ψ_1 и ψ_2, удовлетворяющие одним и тем же начальным и граничным условиям. Тогда их разность $u\equiv\psi_1-\psi_2$ также является решением уравнения Даламбера $\Box u=0$ с нулевыми начальными и граничными условиями. В то же время интеграл

$$I\equiv\frac{1}{2}\oint\limits_V\left[\frac{\dot u^2}{c^2}+(\nabla u)^2\right]\mathrm{d}V,\quad \dot u\equiv\frac{\partial u}{\partial t},$$

сохраняется во времени, поскольку

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int\limits_V\left[\frac{\dot u}{c^2}\ddot u+(\nabla u\nabla\dot u)\right]\mathrm{d}V=\int\limits_V[\dot u\Delta u+(\nabla u\nabla\dot u)]\,dV=$$

$$=\int\limits_V \operatorname{div}(\dot u\nabla u)\,\mathrm{d}V=\oint\limits_S\dot u(\mathbf{n}\nabla)u\,\mathrm{d}S=0,$$

так как на поверхности S для любого момента времени $t\geqslant 0$ $\dot u(\mathbf{n}\nabla)u=0$. Однако $u=\dot u=0$ в момент $t=0$, т. е. $\nabla u=0$ и $I=0$, что возможно только при $u\equiv 0$, откуда и следует единственность решения.

Итак, общее решение уравнения Даламбера содержит две произвольные функции, соответствующие заданию в начальный момент времени ψ и $\partial\psi/\partial t$. Однако нахождение этого общего решения упрощается, если заметить, что всякому решению ψ можно сопоставить независимое от него решение $\partial\psi/\partial t$. Таким образом, достаточно найти решение, содержащее лишь одну произвольную функцию.

Если разыскиваемое решение ψ уравнения Даламбера сферически-симметрично, т. е. $\psi=\psi(t, r)$, то (38.9) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0.$$

При этом для функции $r\psi$ получается уравнение типа (38.7). Пользуясь общим решением (38.8) этого уравнения, убеждаемся, что любое сферически-симметричное решение уравнения Даламбера имеет структуру

$$\psi(t, r)=\frac{1}{r}\left[f(r-ct)+g(r+ct)\right], \tag{38.10}$$

где f и g — произвольные функции. Следует только отметить, что, за исключением выбора $g(x)=-f(-x)$, функция (38.10) имеет в точке $r=0$ особенность и поэтому удовлетворяет уравнению Даламбера всюду, кроме этой точки.

Если же разыскиваемое решение уравнения Даламбера не является сферически-симметричным, то для его нахождения приходится пользоваться специальными методами математической физики. Ознакомимся с одним из них, предложенным Пуассоном и получившим название *метода сферических средних**. Делая подстановку $\psi=tv$, приведем уравнение Даламбера к виду

$$\Delta v=\frac{1}{tc^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(tv)=\frac{1}{ct}\frac{\partial^2}{\partial (ct)^2}(ctv). \tag{38.11}$$

Сравнение (38.11) с (2П.16) показывает, что v можно считать сферическим средним от некоторой функции $f(\mathbf{r})$ по сфере радиуса $a=ct$, т. е., согласно (2П.15),

$$\psi=tv=t\langle f(\mathbf{r})\rangle_{ct}\equiv\frac{t}{4\pi}\oint\limits_{|\xi|=1} f(\mathbf{r}+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi. \tag{38.12}$$

Второе независимое решение получается дифференцированием (38.12) по t, и, таким образом, общее решение уравнения Даламбера имеет вид

$$\psi(t, \mathbf{r})=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\langle f(\mathbf{r})\rangle_{ct}\right)+t\langle g(\mathbf{r})\rangle_{ct}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\oint\limits_{|\xi|=1} f(\mathbf{r}+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi\right]+\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{|\xi|=1} g(\mathbf{r}+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi. \tag{38.13}$$

Задача 38.1. *Получить сферически-симметричное решение* (38.10) *с помощью* (38 13).

Особую роль в теории электромагнитного поля играет частное решение уравнения Даламбера, обозначаемое $D_0(t, r)$. Оно является сферически-симметричным и удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$D_0(0, r)=0;\ \left.\frac{\partial}{\partial t}D_0\right|_{t=0}=\delta(\mathbf{r}). \tag{38.14}$$

---

* См.: *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., 1964. С. 694.

Пользуясь представлением δ-функции в сферических координатах (см. задачу **3.1**) $\delta(\mathbf{r}) = -(2\pi r)^{-1}\delta'(r)$, с помощью (38.14) и (38.10) находим, что для D_0

$$f(r) = -g(r), \quad \frac{c}{r}\left[-f'(r)+g'(r)\right] = -\frac{1}{2\pi r}\delta'(r),$$

откуда $f(r) = \delta(r)/(4\pi c)$. Тогда

$$D_0(t, r) = \frac{1}{4\pi rc}\left[\delta(r-ct) - \delta(r+ct)\right]. \tag{38.15}$$

Задача 38.2. *Показать, что решение уравнения Даламбера, отвечающее начальным условиям* $\psi|_{t=0} = f(\mathbf{r})$; $\partial\psi/\partial t|_{t=0} = g(\mathbf{r})$, *есть*

$$\psi(t, r) = \int\left[D_0(t, R)g(\mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial t}D_0(t, R)f(\mathbf{r}')\right]\mathrm{d}V', \tag{38.16}$$

где $R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$.

Задача 38.3. *Найти решение уравнений Максвелла в вакууме, описывающее аксиально-симметричный монохроматический пучок света (луч лазера).*

§ 39. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле зависит лишь от $x - v_\text{ф}t$, т. е. распространяется со скоростью $v_\text{ф} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ вдоль оси X. Тогда уравнения (38.2), записанные для компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, примут вид

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \tag{39.1}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

Решение этой системы:

$$E_y = E^{(1)}(x - v_\text{ф}t), \quad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^{(1)}(x - v_\text{ф}t), \quad E_x = \text{const}, \tag{39.2}$$

$$E_z = E^{(2)}(x - v_\text{ф}t), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^{(2)}(x - v_\text{ф}t), \quad H_x = \text{const},$$

где $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ — произвольные функции $x - v_\text{ф}t$. Исключая неинтересные с физической точки зрения постоянные поля E_x и H_x, находим два независимых решения исходной системы уравнений:

$$E_y = E^{(1)}(x - v_\text{ф}t), \quad \sqrt{\varepsilon}E_y = \sqrt{\mu}H_z, \quad E_x = E_z = H_x = H_y = 0; \tag{39.3}$$

$$E_z = E^{(2)}(x - v_\text{ф}t), \quad \sqrt{\varepsilon}E_z = -\sqrt{\mu}H_y, \quad E_x = E_y = H_x = H_z = 0. \tag{39.4}$$

Направив вдоль оси X единичный вектор $\mathbf{s}$, убеждаемся, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны быть связаны соотношением

$$\sqrt{\mu}\,\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon}\,[\mathbf{sE}], \quad \text{или} \quad \mathbf{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{sE}] = c\,[\mathbf{sE}]/v_\text{ф}. \tag{39.5}$$