Пользуясь представлением δ-функции в сферических координатах (см. задачу **3.1**) $\delta(\mathbf{r}) = -(2\pi r)^{-1}\delta'(r)$, с помощью (38.14) и (38.10) находим, что для D_0

$$f(r) = -g(r), \quad \frac{c}{r}\left[-f'(r) + g'(r)\right] = -\frac{1}{2\pi r}\delta'(r),$$

откуда $f(r) = \delta(r)/(4\pi c)$. Тогда

$$D_0(t, r) = \frac{1}{4\pi r c}\left[\delta(r - ct) - \delta(r + ct)\right]. \tag{38.15}$$

Задача 38.2. *Показать, что решение уравнения Даламбера, отвечающее начальным условиям* $\psi|_{t=0} = f(\mathbf{r})$; $\partial\psi/\partial t|_{t=0} = g(\mathbf{r})$, *есть*

$$\psi(t, r) = \int\left[D_0(t, R)g(\mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial t}D_0(t, R)f(\mathbf{r}')\right]dV', \tag{38.16}$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Задача 38.3. *Найти решение уравнений Максвелла в вакууме, описывающее аксиально-симметричный монохроматический пучок света (луч лазера).*

§ 39. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле зависит лишь от $x - v_\text{ф} t$, т. е. распространяется со скоростью $v_\text{ф} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ вдоль оси X. Тогда уравнения (38.2), записанные для компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, примут вид

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \tag{39.1}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

Решение этой системы:

$$E_y = E^{(1)}(x - v_\text{ф} t), \quad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^{(1)}(x - v_\text{ф} t), \quad E_x = \text{const}, \tag{39.2}$$

$$E_z = E^{(2)}(x - v_\text{ф} t), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^{(2)}(x - v_\text{ф} t), \quad H_x = \text{const},$$

где $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ — произвольные функции $x - v_\text{ф} t$. Исключая неинтересные с физической точки зрения постоянные поля E_x и H_x, находим два независимых решения исходной системы уравнений:

$$E_y = E^{(1)}(x - v_\text{ф} t), \quad \sqrt{\varepsilon}E_y = \sqrt{\mu}H_z, \quad E_x = E_z = H_x = H_y = 0; \tag{39.3}$$

$$E_z = E^{(2)}(x - v_\text{ф} t), \quad \sqrt{\varepsilon}E_z = -\sqrt{\mu}H_y, \quad E_x = E_y = H_x = H_z = 0. \tag{39.4}$$

Направив вдоль оси X единичный вектор $\mathbf{s}$, убеждаемся, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны быть связаны соотношением

$$\sqrt{\mu}\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon}[\mathbf{sE}], \quad \text{или} \quad \mathbf{B} = \sqrt{\varepsilon\mu}[\mathbf{sE}] = c[\mathbf{sE}]/v_\text{ф}. \tag{39.5}$$

Полученные независимые решения уравнений (38.2) отвечают двум возможным видам *линейной поляризации плоской электромагнитной волны*. Особенностью этих решений является *поперечность электромагнитного поля*, выражающаяся равенствами $(\mathbf{sE})=(\mathbf{sB})=0$. Используя (39.5), плотность энергии электромагнитного поля и вектор Пойнтинга для указанных решений можно представить следующим образом:

$$w=\varepsilon E^2/(4\pi)=\mu H^2/(4\pi),\quad \mathbf{S}=\mathbf{s}v_\Phi w=\mathbf{s}cw/\sqrt{\varepsilon\mu}. \tag{39.6}$$

Частным случаем этого решения являются монохроматические плоские волны, для которых функции $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ выбираются в виде

$$A\cos\left[k(x-v_\Phi t)+\varphi\right],$$

где A и φ — некоторые постоянные. При этом A называется *амплитудой волны*, а φ — *фазовой постоянной*. Часто используют более удобную комплексную форму, замечая, что физический смысл имеют соответственно действительная или мнимая части решения, объединение которых возможно вследствие линейности исходных уравнений. С учетом этого монохроматическую плоскую *линейно поляризованную* волну удобно описывать следующим образом:

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{i[(\mathbf{kr})-\omega t+\varphi]},\quad \mathbf{E}_0^*=\mathbf{E}_0,\quad \mathbf{B}=\frac{c}{v_\Phi}[\mathbf{sE}],\quad (\mathbf{sE})=0,\quad \mathbf{k}=\mathbf{s}\frac{\omega}{v_\Phi}. \tag{39.7}$$

Аналогично, для монохроматической плоской *эллиптически поляризованной* волны

$$\begin{gathered}\mathbf{E}=\left(\mathbf{E}_0^{(1)}+i\mathbf{E}_0^{(2)}\right)e^{i[(\mathbf{kr})-\omega t+\varphi]},\quad \mathbf{E}_0^{*(1,2)}=\mathbf{E}_0^{(1,2)},\\ \mathbf{B}=\frac{c}{v_\Phi}[\mathbf{sE}],\quad (\mathbf{sE})=0,\quad \left(\mathbf{E}_0^{(1)}\mathbf{E}_0^{(2)}\right)=0,\quad \mathbf{k}=\mathbf{s}\frac{\omega}{v_\Phi},\end{gathered} \tag{39.8}$$

причем в случае $|\mathbf{E}_0^{(1)}|=|\mathbf{E}_0^{(2)}|$ получается волна, поляризованная по кругу.

Задача 39.1. *Рассмотреть суперпозицию двух эллиптически поляризованных плоских монохроматических волн, распространяющихся в противоположных направлениях:*

$$\begin{gathered}\mathbf{E}=\left[\left(\mathbf{E}_1^{(1)}+i\mathbf{E}_1^{(2)}\right)e^{-i\omega t}+\left(\mathbf{E}_2^{(1)}+i\mathbf{E}_2^{(2)}\right)e^{i\omega t}\right]e^{i(\mathbf{kr})};\\ \mathbf{E}_r^{(s)}=\mathbf{e}_s E_r^{(s)},\quad (\mathbf{e}_r\mathbf{e}_s)=\delta_{rs},\quad r,\ s=1,\ 2.\end{gathered}$$

Вычислить усредненные по времени плотность энергии $\tilde{w}$ и вектор Пойнтинга $\tilde{\mathbf{S}}$, понимая под усреднением по времени операцию

$$\tilde{f}\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \tag{39.9}$$

Итак, монохроматическая плоская волна всегда может быть представлена в виде суперпозиции линейно поляризованных волн, каждая из которых характеризуется *амплитудой* E_0, единичным *вектором поляризации* $\mathbf{e}_r$ $(r=1,2)$ и *волновым вектором* $\mathbf{k}$. При этом два возможных вектора поляризации $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и вектор $\mathbf{k}$ образуют ортогональную тройку векторов. Каждому вектору $\mathbf{k}$ соответствуют два возможных значения частоты $\omega=\pm k v_\text{ф}$, отличающиеся лишь знаком, что приводит к изменению направления распространения волны. Следовательно, для получения общего решения уравнений Максвелла без источников в однородной среде достаточно взять суперпозицию решений вида

$$\left[\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{-ikv_\text{ф}t}+\mathbf{E}_2(\mathbf{k})e^{-ikv_\text{ф}t}\right]e^{i(\mathbf{kr})}, \tag{39.10}$$

т. е. рассмотреть интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r})=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathbf{E}_1(\mathbf{k})e^{-i\omega t}+\mathbf{E}_2(\mathbf{k})e^{i\omega t}\right]e^{i(\mathbf{kr})}d^3k, \tag{39.11}$$

где $\omega=|\mathbf{k}|v_\text{ф}$, $(\mathbf{kE}_{1,2})=0$, $d^3k=dk_x dk_y dk_z$. Эта формула описывает действительное поле $\mathbf{E}$, если

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{k})=\overset{*}{\mathbf{E}}_2(-\mathbf{k}). \tag{39.12}$$

В последнем нетрудно убедиться, взяв комплексное сопряжение от (39.11) и сделав замену переменной интегрирования $\mathbf{k}\to-\mathbf{k}$. Воспользовавшись соотношением (39.5), находим индукцию магнитного поля, отвечающую решению (39.11):

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r})=c\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{[\mathbf{kE}_1]e^{-i\omega t}-[\mathbf{kE}_2]e^{i\omega t}\right\}e^{i(\mathbf{kr})}\frac{d^3k}{\omega}. \tag{39.13}$$

Во многих физических задачах приходится рассматривать *волновые пакеты*, представляющие собой решения уравнений Максвелла типа (39.11), (39.13), которые достаточно быстро спадают на бесконечности. Очевидно, что волновые пакеты описывают сгустки электромагнитного поля, занимающие некоторые ограниченные области пространства. Для описания движения волнового пакета удобно ввести понятие его *центра масс*, т. е. точки с радиусом-вектором

$$\mathbf{R}=\frac{\int \mathbf{r}w\,dV}{\int w\,dV}. \tag{39.14}$$

Задача 39.2. *Найти закон движения центра масс волнового пакета в однородной среде; убедиться, что его скорость не превышает $v_\text{ф}$. Показать, что если волновой пакет не расплывается, перемещаясь в вакууме как единое целое, то его скорость равна c, а между энергией W и импульсом $\mathbf{G}$ существует связь*

$$c^2\mathbf{G}=\mathbf{c}W. \tag{39.15}$$

Обратимся теперь к знаменитым опытам *П. Н. Лебедева* по измерению давления света. Этими опытами впервые была доказана электромагнитная природа света. Если поместить некоторое поглощающее тело в поле электромагнитной волны, то, согласно (13.4), на него действует сила с плотностью

$$\mathbf{f}=-\partial\mathbf{g}/\partial t+\operatorname{div}\hat{T}. \tag{39.16}$$

Если соотношение (39.16) усреднить по времени, то $\partial\mathbf{g}/\partial t$, очевидно, исчезает и для средней плотности силы имеем

$$\tilde{\mathbf{f}}=\operatorname{div}\tilde{\hat{T}}. \tag{39.17}$$

Интегрируя (39.17) по объему V тела и применяя теорему Гаусса — Остроградского в форме (2П.6), найдем полную силу, действующую на тело:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \int_V \tilde{\mathbf{f}} \mathrm{d}V = \oint \left(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathrm{T}}\right) \mathrm{d}S. \tag{39.18}$$

Итак, электромагнитное поле оказывает на поверхность тела давление

$$\mathbf{p} = \left(\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathrm{T}}\right). \tag{39.19}$$

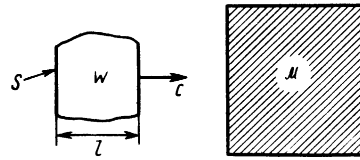

Рис. 39.1

Если тело занимает полупространство $x > 0$ и электромагнитные волны падают на его поверхность нормально, то с учетом (13.5б) и того, что $E_x = B_x = 0$, имеем

$$p = p_x = -\tilde{T}_{xx} = \tilde{w}. \tag{39.20}$$

В другом частном случае изотропного излучения, когда вследствие статистической независимости различных компонент полей

$$\tilde{E}_i \tilde{E}_k = \tilde{E}^2 \delta_{ik}/3, \quad \tilde{B}_i \tilde{B}_k = \tilde{B}^2 \delta_{ik}/3, \quad \tilde{T}_{ik} = \tilde{w} \delta_{ik}/3,$$

электромагнитное давление равно

$$p = \tilde{w}/3. \tag{39.21}$$

Пользуясь полученными результатами, уже нетрудно объяснить и опыты Лебедева. В этих опытах на поглощающее тело некоторой массы $\mathscr{M}$ падает пакет электромагнитных волн, занимающий некоторый объем $V = Sl$ (рис. 39.1). Так как пакет поглощается телом в течение времени l/c, то импульс, сообщенный телу согласно соотношению (39.20), справедливому в пренебрежении расплыванием пакета, т. е. при условии $E_x \ll E$, $B_x \ll B$, равен

$$P = Fl/c = Vp/c = V\tilde{w}/c = \tilde{W}/c = W/c,$$

где $W = wV$ — энергия волнового пакета, не зависящая от времени по закону сохранения энергии. Вводя массу μ_f волнового пакета, т. е. принимая его импульс равным $G = \mu_f c$, из закона сохранения импульса получаем

$$G = \mu_f c = W/c. \tag{39.22}$$

Отсюда вытекает важная связь между энергией и массой волнового пакета, которая независимо могла быть получена и из соотношения (39.15):

$$W = \mu_f c^2. \tag{39.23}$$

§ 40. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Изучим распространение электромагнитных волн в пространстве, заполненном двумя однородными средами, разделенными плоскостью $z = 0$ и характеризующимися постоянными проницаемостями ε, μ $(z < 0)$ и ε', μ' $(z > 0)$. Скорость распространения плоских электромагнитных волн в каждой из сред, согласно (38.4), равна соответственно

$$v_\phi = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad v'_\phi = c/\sqrt{\varepsilon'\mu'}. \tag{40.1}$$

В простейшем частном случае при наличии плоской границы раздела $z = 0$ электромагнитное поле описывается тремя монохроматическими плоскими волнами: в области $z < 0$ имеются падающая $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ (волновой вектор $\mathbf{k}$) и отраженная $\mathbf{E}''$, $\mathbf{B}''$ (волновой вектор $\mathbf{k}''$) волны, а в области $z > 0$ — преломленная