

Интегрируя (39.17) по объему V тела и применяя теорему Гаусса — Остроградского в форме (2П.6), найдем полную силу, действующую на тело:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV = \oint (\mathbf{n} \cdot \vec{T}) dS. \quad (39.18)$$

Итак, электромагнитное поле оказывает на поверхность тела давление

$$\mathbf{p} = (\mathbf{n} \cdot \vec{T}). \quad (39.19)$$

Если тело занимает полупространство $x > 0$ и электромагнитные волны падают на его поверхность нормально, то с учетом (13.56) и того, что $E_x = B_x = 0$, имеем

$$p = p_x = -\vec{T}_{xx} = \tilde{w}. \quad (39.20)$$

В другом частном случае изотропного излучения, когда вследствие статистической независимости различных компонент полей

$$\vec{E}_i \vec{E}_k = \vec{E}^2 \delta_{ik} / 3, \quad \vec{B}_i \vec{B}_k = \vec{B}^2 \delta_{ik} / 3, \quad \vec{T}_{ik} = \tilde{w} \delta_{ik} / 3,$$

электромагнитное давление равно

$$p = \tilde{w} / 3. \quad (39.21)$$

Пользуясь полученными результатами, уже нетрудно объяснить и опыты Лебедева. В этих опытах на поглощающее тело некоторой массы \mathcal{M} падает пакет электромагнитных волн, занимающий некоторый объем $V = Sl$ (рис. 39.1). Так как пакет поглощается телом в течение времени l/c , то импульс, сообщенный телу согласно соотношению (39.20), справедливому в пренебрежении распылением пакета, т. е. при условии $E_x \ll E$, $B_x \ll B$, равен

$$P = Fl/c = Vp/c = V\tilde{w}/c = \vec{W}/c = W/c,$$

где $W = wV$ — энергия волнового пакета, не зависящая от времени по закону сохранения энергии. Вводя массу μ_f волнового пакета, т. е. принимая его импульс равным $G = \mu_f c$, из закона сохранения импульса получаем

$$G = \mu_f c = W/c. \quad (39.22)$$

Отсюда вытекает важная связь между энергией и массой волнового пакета, которая независимо могла быть получена и из соотношения (39.15):

$$W = \mu_f c^2. \quad (39.23)$$

§ 40. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Изучим распространение электромагнитных волн в пространстве, заполненном двумя однородными средами, разделенными плоскостью $z = 0$ и характеризующимися постоянными проницаемостями ϵ , μ ($z < 0$) и ϵ' , μ' ($z > 0$). Скорость распространения плоских электромагнитных волн в каждой из сред, согласно (38.4), равна соответственно

$$v_\phi = c / \sqrt{\epsilon \mu}, \quad v'_\phi = c / \sqrt{\epsilon' \mu'}. \quad (40.1)$$

В простейшем частном случае при наличии плоской границы раздела $z = 0$ электромагнитное поле описывается тремя монохроматическими плоскими волнами: в области $z < 0$ имеются падающая \mathbf{E} , \mathbf{B} (волновой вектор \mathbf{k}) и отраженная \mathbf{E}'' , \mathbf{B}'' (волновой вектор \mathbf{k}'') волны, а в области $z > 0$ — преломленная

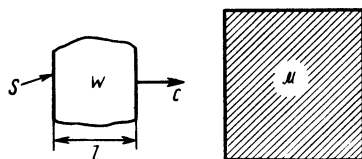


Рис. 39.1

волна \mathbf{E}' , \mathbf{B}' (волновой вектор \mathbf{k}'). Падающую волну будем считать линейно поляризованной, т. е. представимой в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i[(\mathbf{k}\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{\varepsilon\mu} [\mathbf{sE}], \quad (\mathbf{sE}) = 0, \quad \mathbf{k} = \mathbf{s}\omega/v_\phi. \quad (40.2)$$

При этом на границе $z=0$ с нормалью \mathbf{n} должны выполняться граничные условия (12.8), которые при отсутствии свободных поверхностных зарядов и токов проводимости имеют вид

$$\varepsilon'(\mathbf{nE}') = \varepsilon\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{E}''), \quad (\mathbf{nB}') = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{B}''), \quad (40.3)$$

$$[\mathbf{nE}'] = [\mathbf{n}(\mathbf{E} + \mathbf{E}'')], \quad \frac{1}{\mu'}[\mathbf{nB}'] = \frac{1}{\mu}[\mathbf{n}(\mathbf{B} + \mathbf{B}'')]. \quad (40.4)$$

Замечая, что в этих уравнениях векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} содержат фазовые множители типа $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t]$, мы приходим к выводу, что граничные условия могут быть выполнены только при совпадении всех фаз. Это означает, что для любого вектора \mathbf{r} , лежащего в плоскости раздела, т. е. удовлетворяющего условию $(\mathbf{nr}) = z = 0$, должны выполняться равенства

$$(\mathbf{k}\mathbf{r}) = (\mathbf{k}'\mathbf{r}) = (\mathbf{k}''\mathbf{r}). \quad (40.5)$$

Из (40.5) следует, что векторы \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' лежат в плоскости векторов \mathbf{k} , \mathbf{n} . Вводя углы падения α , отражения α'' и преломления α' , перепишем условие (40.5) в виде (рис. 40.1)

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' = k'' \sin \alpha''.$$

Замечая, что $k'' = k$, и вводя показатели преломления сред $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ и $n' = \sqrt{\varepsilon'\mu'}$, получаем известные законы геометрической оптики:

$$\alpha'' = \alpha, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{v_\phi}{v'_\phi} = \frac{n'}{n}, \quad (40.6)$$

т. е. равенство углов падения и отражения и закон Снеллиуса.

Для разрешения уравнений (40.3), (40.4) удобно различать два возможных случая в зависимости от того, лежит ли вектор \mathbf{E} в плоскости падения \mathbf{k} , \mathbf{n} или перпендикулярен ей.

В первом случае, когда вектор \mathbf{E} лежит в плоскости падения \mathbf{k} , \mathbf{n} , очевидно, $(\mathbf{nB}) = 0$ и уравнения (40.3) и (40.4) с учетом (40.2) и закона Снеллиуса дают (рис. 40.2)

$$\frac{\mu \sin \alpha}{\mu' \sin \alpha'} E'_0 = E_0 + E''_0, \quad \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} E'_0 = E_0 - E''_0,$$

откуда после несложных преобразований находим:

$$E'_0 = \frac{2E_0(n/n') \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + (\mu/\mu') \sin 2\alpha}, \quad E''_0 = E_0 \frac{(\mu/\mu') \sin 2\alpha - \sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha + (\mu/\mu') \sin 2\alpha}. \quad (40.7)$$

При $\mu = \mu'$ эти формулы упрощаются:

$$E'_0 = \frac{2E_0 \sin \alpha' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha') \cos(\alpha - \alpha')}, \quad E''_0 = E_0 \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')}. \quad (40.8)$$

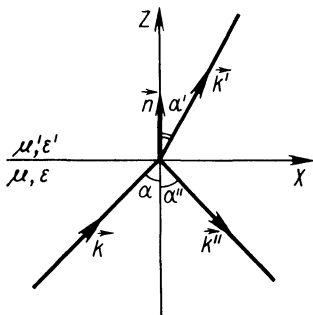


Рис. 40.1

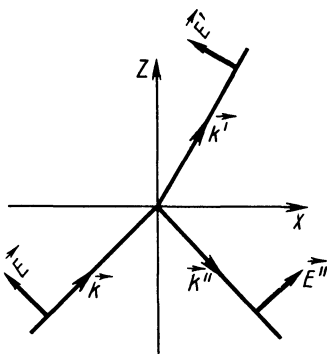


Рис. 40.2

Во втором случае, когда вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения \mathbf{k} , \mathbf{n} , т. е. $(\mathbf{nE})=0$, граничные условия (рис. 40.3) приводят к соотношениям

$$E'_0 = E_0 + E''_0, \quad \sqrt{\epsilon'/\mu'} E'_0 \cos \alpha' = \sqrt{\epsilon/\mu} (E_0 - E''_0) \cos \alpha,$$

откуда

$$E'_0 = \frac{2E_0}{1 + (\mu/\mu')(\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha')}, \quad E''_0 = E_0 \frac{1 - (\mu/\mu')(\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha')}{1 + (\mu/\mu')(\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \alpha')}. \quad (40.9)$$

При $\mu = \mu'$ эти формулы упрощаются:

$$E'_0 = 2E_0 \frac{\cos \alpha \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad E''_0 = E_0 \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha + \alpha')}. \quad (40.10)$$

Очевидно, что падающая волна с произвольной поляризацией может быть представлена в виде суперпозиции линейно поляризованных волн, векторы поляризации которых либо лежат в плоскости падения, либо перпендикулярны ей. Таким образом, к рассмотренным выше двум случаям сводится любая задача о распространении электромагнитных волн при наличии плоской границы раздела двух сред*.

При нормальном падении следует положить $\alpha \rightarrow 0$ и в соответствии с законом Снеллиуса $\alpha' = \alpha n/n' \rightarrow 0$. Тогда из формулы (40.7) получаем:

$$E'_0 = 2E_0/(1 + \chi), \quad E''_0 = E_0(\chi - 1)/(\chi + 1), \quad (40.11)$$

где $\chi = \mu n' / (\mu' n) = \sqrt{\epsilon' \mu / (\epsilon \mu')}$. Пользуясь выражением (39.6) для вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathbf{s} \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2$, нетрудно подсчитать коэффициенты отражения \mathcal{R} и прохождения \mathcal{D} , которые определяются

* Соотношения (40.8) и (40.10) называют формулами Френеля.

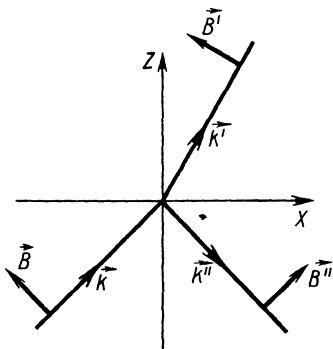


Рис. 40.3

соответственно как отношения интенсивностей отраженной или преломленной волн к интенсивности падающей волны. Таким образом,

$$\mathcal{R} = \frac{|S''|}{|S|} = \left(\frac{E_0''}{E_0} \right)^2; \quad \mathcal{D} = \frac{|S'}{|S|} = \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'}} \left(\frac{E_0'}{E_0} \right)^2. \quad (40.12)$$

В частности, для нормального падения, согласно (40.11), находим:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^2, \quad \mathcal{D} = \kappa \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^2, \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{\epsilon' \mu}{\epsilon \mu'}. \quad (40.13)$$

Нетрудно убедиться, что в соответствии с законом сохранения энергии $\mathcal{R} + \mathcal{D} = 1$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu = \mu'$ и волна падает на границу под углом Брюстера $\alpha = \beta$, определяемым условием

$$\operatorname{tg} \beta = n' / n. \quad (40.14)$$

Очевидно, что

$$\sin \alpha' = \sin \beta (n / n') = \cos \beta.$$

Иначе говоря, выполнено соотношение

$$\alpha' + \beta = \pi / 2. \quad (40.15)$$

Так как в этом случае $\operatorname{tg}(\alpha + \alpha') = \infty$, то, как видно из (40.8), $E_0'' = 0$, т. е. отсутствует отраженная волна, поляризованная в плоскости падения. Таким образом, если падающая под углом Брюстера волна имеет смешанную поляризацию, то отраженная волна будет поляризована перпендикулярно плоскости падения, удовлетворяя условию $(\mathbf{nE}'') = 0$. Указанным явлением можно воспользоваться для получения плоскополяризованных световых пучков.

Другое интересное явление наблюдается при падении волны из более плотной среды в менее плотную ($n > n'$) под углом

$$\alpha = \alpha_0 = \arcsin(n' / n). \quad (40.16)$$

Тогда $\sin \alpha' = 1$, т. е. $\alpha' = \pi / 2$. Это означает, что преломленная волна идет вдоль границы раздела двух сред. Отмеченное явление называется *внутренним отражением*. Исследуем поле в области $z > 0$ более подробно. Если $\alpha > \alpha_0$, то

$$\sin \alpha' = \sin \alpha \frac{n}{n'} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} > 1,$$

откуда

$$\cos \alpha' = \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0} \right)^{1/2} = \pm i \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha_0} - 1 \right)^{1/2}. \quad (40.17)$$

Физически это означает, что в полученном решении, описывающем поле преломленной волны, волновой вектор k'_z является мнимым. Так, считая плоскостью падения (X, Z) , убеждаемся, что поля \mathbf{E}' и \mathbf{B}' содержат множитель вида

$$\begin{aligned} & \exp [ik' (x \sin \alpha' + z \cos \alpha')] = \\ & = \exp [\pm k' z (\sin^2 \alpha / \sin^2 \alpha_0 - 1)^{1/2}] \exp [ik' x \sin \alpha / \sin \alpha_0]. \end{aligned} \quad (40.18)$$

Решение со знаком плюс соответствует растущему на бесконечности полю, и поэтому оно должно быть отброшено как физически нереализуемое. Оставшееся решение (40.18) описывает электромагнитную волну с затухающей в направлении Z амплитудой. При этом волна распространяется вдоль границы раздела двух сред.

Задача 40.1. Для случая внутреннего отражения найти поля \mathbf{E}' , \mathbf{B}' и вектор Пойнтинга \mathbf{S}' в менее плотной среде.

В заключение отметим, что вся развитая выше теория отражения и преломления электромагнитных волн легко обобщается на случай комплексных проницаемостей ϵ и μ (см. § 61). Как легко убедиться, в этом случае амплитуды электромагнитных волн содержат затухающие множители такого же типа, как при внутреннем отражении.

Задача 40.2. Найти коэффициент отражения света от металлического зеркала и оказываемое на него давление при нормальном падении.

§ 41. ПОЛЕ ЗАДАННЫХ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ В ВАКУУМЕ

Ранее нами было установлено, что уравнения Максвелла допускают существование решений, описывающих свободное электромагнитное поле и представляющих собой суперпозицию электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме со скоростью света c . Рассмотрим теперь электромагнитное поле в присутствии зарядов и токов.

Предположим, что известны плотности зарядов $\rho(t, \mathbf{r})$ и токов $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющие закону сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{r}) + \operatorname{div} \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (41.1)$$

Для нахождения полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , порожденных этими источниками, воспользуемся уравнениями Максвелла (6.4):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (\text{a}) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad (\text{б}) \quad (41.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{в}) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{г})$$