откуда

$$\cos\alpha' = \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_0}\right)^{1/2} = \pm i\left(\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_0} - 1\right)^{1/2}. \qquad (40.17)$$

Физически это означает, что в полученном решении, описывающем поле преломленной волны, волновой вектор k'_z является мнимым. Так, считая плоскостью падения (X, Z), убеждаемся, что поля $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ содержат множитель вида

$$\exp\left[ik'(x\sin\alpha' + z\cos\alpha')\right] =$$
$$= \exp\left[\pm k'z\left(\sin^2\alpha/\sin^2\alpha_0 - 1\right)^{1/2}\right]\exp\left[ik'x\sin\alpha/\sin\alpha_0\right]. \qquad (40.18)$$

Решение со знаком плюс соответствует растущему на бесконечности полю, и поэтому оно должно быть отброшено как физически нереализуемое. Оставшееся решение (40.18) описывает электромагнитную волну с затухающей в направлении Z амплитудой. При этом волна распространяется вдоль границы раздела двух сред.

Задача 40.1. *Для случая внутреннего отражения найти поля* $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$ *и вектор Пойнтинга* $\mathbf{S}'$ *в менее плотной среде.*

В заключение отметим, что вся развитая выше теория отражения и преломления электромагнитных волн легко обобщается на случай комплексных проницаемостей ε и μ (см. § 61). Как легко убедиться, в этом случае амплитуды электромагнитных волн содержат затухающие множители такого же типа, как при внутреннем отражении.

Задача 40.2. *Найти коэффициент отражения света от металлического зеркала и оказываемое на него давление при нормальном падении.*

§ 41. ПОЛЕ ЗАДАННЫХ ЗАРЯДОВ И ТОКОВ В ВАКУУМЕ

Ранее нами было установлено, что уравнения Максвелла допускают существование решений, описывающих свободное электромагнитное поле и представляющих собой суперпозицию электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме со скоростью света c. Рассмотрим теперь электромагнитное поле в присутствии зарядов и токов.

Предположим, что известны плотности зарядов $\rho(t, \mathbf{r})$ и токов $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$, удовлетворяющие закону сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, \mathbf{r}) + \operatorname{div}\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \qquad (41.1)$$

Для нахождения полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, порожденных этими источниками, воспользуемся уравнениями Максвелла (6.4):

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \ \text{(а)} \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \ \text{(б)} \\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0, \ \text{(в)} \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \ \text{(г)} \end{aligned} \qquad (41.2)$$

Чтобы удовлетворить уравнению (41.2г), положим

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{41.3}$$

Тогда уравнение (41.2в) примет вид

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$

с очевидным решением

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \tag{41.4}$$

Подстановка (41.3), (41.4) в уравнения (41.2) приводит к уравнениям для потенциалов φ и $\mathbf{A}$:

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{41.5}$$

$$\Delta\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}=-4\pi\rho.$$

Однако равенства (41.3), (41.4) определяют электромагнитные потенциалы φ и $\mathbf{A}$ неоднозначно, так как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не изменяются при замене:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}'+\nabla\psi,\quad \varphi=\varphi'-\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}, \tag{41.6}$$

где ψ — произвольный скаляр. Преобразование (41.6) называется *калибровочным*.

Неоднозначностью потенциалов можно воспользоваться для упрощения полученных уравнений (41.5). Например, можно потребовать, чтобы потенциалы удовлетворяли условию

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \tag{41.7}$$

называемому *условием Лоренца* (по имени датского физика Л. В. Лоренца). Если первоначально введенные потенциалы φ', $\mathbf{A}'$ не удовлетворяют этому условию, то новые потенциалы φ, $\mathbf{A}$, связанные со старыми калибровочным соотношением (41.6), будут ему удовлетворять, если скаляр ψ считать решением уравнения

$$\Box\psi=-\left(\operatorname{div}\mathbf{A}'+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right).$$

При этом очевидно, что ψ определено с точностью до решения ψ_0 уравнения Даламбера $\Box\psi_0=0$.

Если потребовать соблюдения условия Лоренца (41.7), то для потенциалов получим следующую систему уравнений:

$$\Box\varphi=-4\pi\rho,\quad \Box\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\quad \operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{41.8}$$

Задача 41.1. *Использовать «вывернутые» потенциалы* φ, $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$, *сделав подстановку* $\mathbf{E}=-\nabla\varphi+\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}+\operatorname{rot}\mathbf{A}$. *Получить для них уравнения, предположив выполнение дополнительных условий* $\operatorname{div}\mathbf{a}=\operatorname{div}\mathbf{A}=0$.

Заметим, что вместо условия Лоренца можно наложить на потенциалы и любое другое условие. Например, часто встречается условие *кулоновской*, или *поперечной*, *калибровки*

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{41.9}$$

В этом случае из (41.5) вытекают следующие уравнения для потенциалов:

$$\Box\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j}+\frac{1}{4\pi}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right),\quad \Delta\varphi=-4\pi\rho,\quad \operatorname{div}\mathbf{A}=0. \tag{41.10}$$

Как видно, уравнение для потенциала φ оказывается статическим, чем и обусловлено первое название использованной калибровки — «кулоновская». Второе название показывает, что для плоских волн, когда $\mathbf{A}\sim\exp\left[i(\mathbf{kr})\right]$, (41.9) эквивалентно условию «поперечности» $(\mathbf{kA})=0$.

Несмотря на множество возможных дополнительных условий, система уравнений (41.8) используется чаще других, так как содержит одинаковые уравнения для φ и $\mathbf{A}$. В связи с этим вполне достаточно решить только уравнение для скалярного потенциала φ, а векторный потенциал $\mathbf{A}$ получится в результате формальной замены $\rho\to\mathbf{j}/c$. Таким образом, описание электромагнитного поля, порожденного заданными источниками, сводится к решению уравнения

$$\Box\varphi=-4\pi\rho. \tag{41.11}$$

Существует несколько методов его решения. Воспользуемся наиболее простым и физически наглядным *методом функций Грина. Функцией Грина оператора Даламбера* называется функция $G(t-t',\ \mathbf{r}-\mathbf{r}')$, удовлетворяющая уравнению

$$\Box G=-\delta(t-t')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{41.12}$$

Нетрудно видеть, что знание функции Грина позволяет получить решение уравнения (41.11) простым интегрированием:

$$\varphi(t,\mathbf{r})=4\pi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t'\int G(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\rho(t',\mathbf{r}')\,\mathrm{d}V'+\varphi_0, \tag{41.13}$$

где φ_0 — некоторое решение уравнения Даламбера.

Физически функция Грина представляет собой потенциал, порожденный точечным мгновенно действующим источником. Заменой переменных $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, $T=t-t'$ всегда можно добиться, чтобы этот источник находился в начале координат $\mathbf{R}=0$ и включался в момент времени $T=0$. Поэтому простейшая функция Грина является сферически-симметричной по переменной $\mathbf{R}$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RG)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}=\frac{1}{2\pi R}\delta'(R)\delta(T), \tag{41.14}$$

где мы воспользовались представлением трехмерной δ-функции в сферических координатах (см. задачу **3.1**): $\delta(\mathbf{r})=-(2\pi r)^{-1}\delta'(r)$.

Сделаем теперь замену переменных, уже использованную в § 38:

$$\xi=R-cT,\quad \eta=R+cT,\quad u=RG. \tag{41.15}$$

Тогда уравнение (41.14) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{c}{4\pi}\delta(\eta-\xi)\delta'(\xi). \tag{41.16}$$

Нам достаточно указать какое-либо частное решение u_1 уравнения (41.16), что легко сделать дважды проинтегрировав его правую часть. Однако результат будет зависеть от выбора пределов интегрирования, для установления которых нужно привлечь некоторые дополнительные сведения об искомом решении.

В частности, если принять *физический принцип причинности*, согласно которому поле порождается источниками и до их включения должно отсутствовать*, то необходимо наложить условие $G(T<0)=0$. Соответствующая функция Грина называется *запаздывающей*. Для ее получения нужно выбрать частное решение u_1, исчезающее при $T\to-\infty$. Замечая, что при фиксированном R и $T\to-\infty$ имеем $\xi\to+\infty$, $\eta\to-\infty$, искомое решение u_1 можно получить повторным интегрированием правой части (41.16):

$$u_1(\xi,\eta)=-\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\xi}^{\infty}d\xi'\int\limits_{-\infty}^{\eta}d\eta'\delta(\eta'-\xi')\delta'(\xi'). \tag{41.17}$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся формулой, вытекающей из свойств δ-функции:

$$\int\limits_{-\infty}^{x}f(x')\delta(x'-y)dx'=\theta(x-y)f(y), \tag{41.18}$$

где $\theta(x-y)$ — ступенчатая функция Хевисайда $[\theta(x)=(1+\operatorname{sign}x)/2]$. С учетом (41.18) находим

$$u_1(\xi,\eta)=-\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\xi}^{\infty}\theta(\eta-\xi')\delta'(\xi')d\xi'.$$

---

* Наглядный физический анализ следствий принципа причинности приведен в Фейнмановских лекциях по физике (Вып. 6. Электродинамика. М., 1966).

Выполняя интегрирование по частям и замечая, что согласно (41.18), $\theta'(x)=\delta(x)$, получаем

$$u_1=\frac{c}{4\pi}\theta(\eta-\xi)\delta(\xi)-\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\xi}^{\infty}\delta(\eta-\xi')\delta(\xi')\,d\xi'=\frac{c}{4\pi}\theta(\eta-\xi)[\delta(\xi)-\delta(\eta)].$$

Возвращаясь к переменным R и T и учитывая (38.15), находим

$$u_1(T,R)=\frac{c}{4\pi}\theta(T)[\delta(R-cT)-\delta(R+cT)]=c^2R\theta(T)D_0(T,R).$$

Поскольку $u_1(T<0)=0$, функция Грина $G=u_1R^{-1}$ является запаздывающей и имеет вид

$$G^{\text{зап}}(T,R)=c^2\theta(T)D_0(T,R). \tag{41.19}$$

Так как при подстановке (41.19) в (41.13) вклад в интеграл будет давать только область $T>0$, в которой $\theta(T)=1$ и $D_0(T,R)=\delta(R-cT)/(4\pi Rc)$, то (41.19) эквивалентно представлению

$$G^{\text{зап}}(T,R)=\frac{c}{4\pi R}\delta(R-cT), \tag{41.19a}$$

которое обычно и используется. Полученное решение описывает сферическую волну, расходящуюся от источника.

Приведем еще другой метод решения уравнения (41.12), использующий преобразование Фурье по времени. В теории интеграла Фурье доказывается справедливость следующего представления для δ-функции:

$$\delta(T)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega T}\,d\omega.$$

Используя его и записывая преобразование Фурье для функции Грина

$$G(T,\mathbf{R})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega T}G_\omega(\mathbf{R})\,d\omega,$$

находим, что $G_\omega(\mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta+\omega^2/c^2)G_\omega(\mathbf{R})=-\delta(\mathbf{R}).$$

Соответствующее однородное уравнение (при $R\neq0$) имеет простые решения вида $\exp(\pm i\omega R/c)/R$. Поэтому метод вариации постоянных подсказывает подстановку $G_\omega(\mathbf{R})=v(R)/R$. Учитывая (3.9) и свойство δ-функции, выражающееся соотношением $f(\mathbf{R})\delta(\mathbf{R})=f(0)\delta(\mathbf{R})$, находим, что $v(R)$ подчиняется уравнению

$$-4\pi v(0)\delta(\mathbf{R})+\frac{1}{R}\left(v''+\frac{\omega^2}{c^2}v\right)=-\delta(\mathbf{R}),$$

которое, в частности, удовлетворяется, если

$$v(0)=1/(4\pi),\quad v''+\omega^2v/c^2=0.$$

Таким образом, частное решение уравнения для $G_\omega(\mathbf{R})$ имеет вид

$$G_\omega(R)=\frac{1}{4\pi R}\left[A\exp\left(i\frac{\omega R}{c}\right)+B\exp\left(-i\frac{\omega R}{c}\right)\right],$$

где постоянные A и B связаны условием $A+B=1$. Для $A=1$, $B=0$ это решение приводит к функции Грина

$$G(T, R)=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[i\frac{\omega}{c}(R-cT)\right]\frac{d\omega}{R}=\frac{c}{4\pi R}\delta(R-cT)=G^{\text{зап}}.$$

Замечая, что уравнение (41.14) инвариантно относительно замены $T\to -T$, другое его решение можно получить из (41.19) указанной заменой. Оно будет соответствовать *опережающей функции Грина*

$$G^{\text{опер}}(T, R)=-c^2\theta(-T)D_0(T, R)=\frac{c}{4\pi R}\delta(R+cT), \qquad (41.20)$$

исчезающей при $T>0$, а при $T<0$ описывающей сферическую волну, сходящуюся к источнику. Очевидно, что такое решение противоречит физическому принципу причинности и на этом основании обычно отбрасывается. Однако следует заметить, что разность запаздывающей и опережающей функций Грина [см. (38.15)] равна

$$G^{\text{зап}}-G^{\text{опер}}=c^2D_0, \qquad (41.21)$$

т. е. соответствует решению уравнения Даламбера, которое физически можно интерпретировать как влияние бесконечно удаленных источников. Поэтому, если такое влияние не исключено, отбрасывать опережающие решения нецелесообразно.

Очевидно, что произвольную функцию Грина G оператора Даламбера всегда можно представить в виде

$$G(T, \mathbf{R})=G^{\text{зап}}(T, R)+G_0(T, \mathbf{R}), \qquad (41.22)$$

где G_0 — некоторое решение уравнения Даламбера. В частности, можно рассмотреть функцию Грина

$$G^{(a)}=G^{\text{зап}}-ac^2D_0, \quad a=\text{const}, \qquad (41.23)$$

которая при $a=0$ совпадает с запаздывающей, а при $a=1$ — с опережающей. Если принять физический принцип причинности и ограничиться запаздывающей функцией Грина, то, согласно (41.13), получится частное решение уравнений поля (41.8)

$$\varphi(t, \mathbf{r})=\int\rho\left(t-\frac{R}{c}, \mathbf{r}'\right)\frac{dV'}{R}, \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r})=\int\mathbf{j}\left(t-\frac{R}{c}, \mathbf{r}'\right)\frac{dV'}{cR}, \qquad (41.24)$$

описывающее *запаздывающие потенциалы*.

Аналогично, если в (41.13) использовать опережающую функцию Грина (41.20), то получится другое частное решение — *опережающие потенциалы*, — отличающееся от (41.24) тем, что в подынтегральных выражениях стоит $t+R/c$ вместо $t-R/c$.

Задача 41.2. *Показать, что запаздывающие потенциалы удовлетворяют условию Лоренца.*

Чтобы получить общее решение уравнений Максвелла, необходимо к запаздывающему решению (41.24) добавить произвольное решение φ_0, $\mathbf{A}_0$ уравнения Даламбера, удовлетворяющее условию Лоренца. Например, если воспользоваться представлением (38.16) для решения уравнения Даламбера, то наиболее общее выражение для скалярного потенциала φ, удовлетворяющее уравнениям поля (41.8), можно записать в виде

$$\varphi(t, \mathbf{r})=\int \rho\left(t-\frac{R}{c}, \mathbf{r}'\right)\frac{\mathrm{d}V'}{R}+\int\left[D_0(t, R)g(\mathbf{r}')+\frac{\partial}{\partial t}D_0(t, R)f(\mathbf{r}')\right]\mathrm{d}V', \tag{41.25}$$

где f и g — произвольные функции. Аналогичное выражение можно получить и для векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Выбор того или иного решения обусловлен характером физической задачи, принятыми граничными и начальными условиями. В обычной постановке задачи зависящая от времени часть ρ и $\mathbf{j}$ включается лишь в некоторый момент времени t_0. Естественно, что влияние такого включения источников должно проявиться несколько позже, т. е. при $t>t_0$ (принцип причинности), и поэтому физически допустимым решением является лишь запаздывающее. Однако не исключена и другая возможность, когда электромагнитное поле порождается бесконечно удаленными источниками. В таком случае соответствующее решение будет выглядеть как свободное и должно добавляться к запаздывающему решению.

Физическая выделенность запаздывающих решений обусловлена тем, что в обычной постановке задачи мы хотим описать будущее некоторой системы, зная ее прошлое. Однако вполне допустима и другая постановка задачи, когда прошлое системы необходимо восстановить по ее настоящему и будущему, т. е. рассмотреть обратную эволюцию системы. Нетрудно видеть, что в этом случае должны использоваться опережающие решения. Одно из интересных проявлений опережающих решений будет рассмотрено нами позже в связи с задачей о реакции излучения (см. § 47).

В заключение отметим, что наличие двух типов равноправных решений — запаздывающих и опережающих — у системы уравнений (41.8) связано с инвариантностью оператора Даламбера при отражении времени. Выбор же запаздывающего решения выделяет направление течения времени, что неизбежно при описании макроскопических электромагнитных процессов.

Отбрасывание опережающих потенциалов можно обосновать исходя из более общих — *термодинамических* — соображений. Согласно второму закону термодинамики, невозможно создать тепловую машину второго рода, которая непрерывно совершала бы работу за счет охлаждения единственного резервуара теплоты. Если окружающее излучатель пространство, заполненное электромагнитным излучением, рассматривать как тепловой резервуар, то излучатель может извлекать из него полезную работу лишь при отрицательном среднем потоке электромагнитной энергии (т. е. при потоке энергии к излучателю) и будет затрачивать работу на излучение при положительном среднем потоке. Но средний поток энергии положителен в случае использования запаздывающих потенциалов и отрицателен в случае опережающих (см. § 43). Второе начало запрещает отрицательный поток энергии от излучателя, поэтому можно считать опережающие потенциалы запрещаемыми вторым началом термодинамики.

§ 42. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ И МАГНИТНЫЙ ВЕКТОРЫ ГЕРЦА

Если система источников нейтральна, т. е. удовлетворяет условию

$$\int \rho \, dV = 0, \tag{42.1}$$

то (см. задачу **2.2**) закон сохранения заряда (41.1) будет тождественно выполнен, если ввести поляризованность $\mathbf{P}$ и намагниченность $\mathbf{M}$, положив

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \partial \mathbf{P}/\partial t + c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \tag{42.2}$$

В таком случае электромагнитные потенциалы φ и $\mathbf{A}$ могут быть найдены из уравнений

$$\Box \varphi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \Box \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{42.3}$$

Чтобы выполнить условие Лоренца, удобно ввести электрический $\mathbf{\Pi}$ и магнитный $\mathbf{Z}$ векторы Герца, сделав подстановку:

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{Z}. \tag{42.4}$$

Тогда уравнения (42.3) приводятся к виду

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Box \mathbf{\Pi} + 4\pi \mathbf{P}) + \operatorname{rot}(\Box \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M}) = 0, \quad \operatorname{div}(\Box \mathbf{\Pi} + 4\pi \mathbf{P}) = 0. \tag{42.5}$$

Из второго уравнения следует, что

$$\Box \mathbf{\Pi} + 4\pi \mathbf{P} = \operatorname{rot} \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор. Тогда первое из уравнений (42.5) сводится к следующему:

$$\operatorname{rot}\left(\Box \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}\right) = 0.$$

Из него, в свою очередь, вытекает, что

$$\Box \mathbf{Z} + 4\pi \mathbf{M} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \nabla \chi,$$

где χ — произвольный скаляр.

Воспользуемся теперь неоднозначностью векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ (см. задачу **2.2**), замечая, что подстановка

$$\mathbf{P} \to \mathbf{P} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad \mathbf{M} \to \mathbf{M} - \frac{1}{4\pi} \nabla \chi + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$$