

не меняет источников  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  и полей, ими порожденных. Поэтому без ограничения общности можно положить  $\mathbf{a}=0$  и  $\chi=0$ . В результате уравнения для векторов Герца  $\mathbf{\Pi}$  и  $\mathbf{Z}$  упростятся:

$$\square \mathbf{\Pi} = -4\pi \mathbf{P}, \quad \square \mathbf{Z} = -4\pi \mathbf{M}. \quad (42.6)$$

Выбирая запаздывающее решение этих уравнений как наиболее соответствующее физической постановке задачи\*, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{P} \left( t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}' \right) \frac{dV'}{R}; \\ \mathbf{Z}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{M} \left( t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}' \right) \frac{dV'}{R}. \end{aligned} \quad (42.7)$$

Легко видеть, что в статическом пределе ( $c \rightarrow \infty$ ) формулы (42.7) переходят соответственно в (21.8) и (30.6), т. е. векторы  $\mathbf{\Pi}$  и  $\mathbf{Z}$  переходят в соответствующие статические векторы Герца.

Используя решение (42.7), по формулам (42.4) нетрудно найти потенциалы  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$ , а затем  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Последние можно выразить непосредственно через векторы Герца:

$$\mathbf{E} = -4\pi \mathbf{P} + \text{rot rot } \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{Z}, \quad \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{Z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{\Pi}. \quad (42.8)$$

### § 43. ПОЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ВИБРАТОРОВ ГЕРЦА

В качестве полезного применения векторов Герца опишем электромагнитное поле, создаваемое изменяющимся во времени дипольным моментом  $\mathbf{p}(t)$ . Конкретной реализацией такого переменного диполя может служить, например, поляризованная молекула с переменным расстоянием  $l(t)$  между ее разделенными зарядами или простейшая антенна — *электрический вибратор Герца*, длина которого  $l$  постоянна, а заряд отдельного полюса изменяется со временем (рис. 43.1). Если рассматривать поле вибратора на расстоянии  $r \gg l$ , то его можно считать сосредоточенным диполем и положить  $\mathbf{P} = \mathbf{p}(t) \delta(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{M} = 0$ . Тогда из (42.7) находим векторы Герца:

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{r} \mathbf{p} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad \mathbf{Z} = 0. \quad (43.1)$$

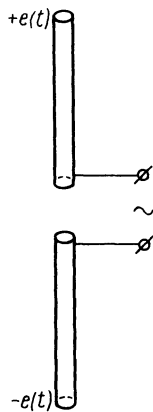


Рис. 43.1

\* Предполагается, что векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  изменяются со временем лишь начиная с некоторого момента времени  $t_0$ .

Для вычисления напряженности  $\mathbf{E}$  и индукции  $\mathbf{B}$  используем формулы (42.8) с учетом того, что вне вибратора  $\mathbf{P}=0$ , т. е.

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \Pi, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi.$$

Согласно (2П.4в), имеем

$$\text{rot } \Pi = \text{rot } \frac{\mathbf{p}(t-r/c)}{r} = -\frac{1}{r^3} [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}] - \frac{1}{r^2 c} [\mathbf{r}\ddot{\mathbf{p}}],$$

где  $\mathbf{p}$  — функция запаздывающего аргумента  $t' = t - r/c$ ; точкой обозначено дифференцирование по времени. Используя (2П.4г), находим

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \Pi &= -\frac{r}{r^3} \text{div } \mathbf{p} + \mathbf{p} \text{div } \frac{r}{r^3} - (\mathbf{p}\nabla) \frac{r}{r^3} + \frac{1}{r^3} (\mathbf{r}\nabla) \mathbf{p} - \\ &\quad - \frac{r}{r^2 c} \text{div } \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}} \text{div } \frac{r}{r^2 c} - (\dot{\mathbf{p}}\nabla) \frac{r}{r^2 c} + \frac{1}{r^2 c} (\mathbf{r}\nabla) \dot{\mathbf{p}} = \\ &= \frac{r}{r^4 c} (\mathbf{r}\ddot{\mathbf{p}}) - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + 3 \frac{r(\mathbf{p}\dot{\mathbf{r}})}{r^5} - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r^2 c} + \frac{r}{r^3 c^2} (\mathbf{r}\ddot{\mathbf{p}}) + 2 \frac{r(\dot{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{r}})}{r^4 c} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{rc^2}. \end{aligned}$$

В результате получаем выражения для  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r^3} \left\{ 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}) - \mathbf{p} + \frac{r}{c} [3\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}] + \frac{r^2}{c^2} [\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}]] \right\}, \quad (43.2)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{r^2 c} [\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}] - \frac{1}{rc^2} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}],$$

где введен единичный вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ . В (42.2) выделим три составные части:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$$

— в зависимости от степени их убывания при  $r \rightarrow \infty$ . Первая часть, убывающая пропорционально  $r^{-3}$ , соответствует полю квазистатического диполя в *ближней (квазистационарной) зоне*:

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{1}{r^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}) - \mathbf{p}], \quad \mathbf{B}^{(0)} = 0. \quad (43.3)$$

Вторая часть, убывающая пропорционально  $r^{-2}$ , отвечает полю квазистатического тока поляризации  $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ :

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{r^2 c} [3\mathbf{n}(\mathbf{n}\ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}], \quad \mathbf{B}^{(1)} = -\frac{1}{r^2 c} [\mathbf{n}\dot{\mathbf{p}}]. \quad (43.4)$$

Но если магнитное поле  $\mathbf{B}^{(1)}$  возникает в полном соответствии с законом Био—Савара—Лапласа (1.8), то появление элект-

рического поля  $\mathbf{E}^{(1)}$  обусловлено исключительно запаздыванием. Нетрудно видеть, что на малых расстояниях этот член можно не учитывать, так как

$$\mathbf{p}(t-r/c) \approx \mathbf{p}(t) - \dot{\mathbf{p}}r/c$$

и слагаемое в  $\mathbf{E}$ , пропорциональное  $r^{-2}$ , исчезает.

Наибольший интерес представляет третья часть поля вибратора, описываемая векторами  $\mathbf{E}^{(2)}$  и  $\mathbf{B}^{(2)}$ , зависящими от  $\ddot{\mathbf{p}}$  и убывающими на больших расстояниях пропорционально  $r^{-1}$ :

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{rc^2} [\mathbf{n} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}]], \quad \mathbf{B}^{(2)} = -\frac{1}{rc^2} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}]. \quad (43.5)$$

Векторы (43.5) определяют поле излучения, соответствующее *дальней (волновой) зоне*. Так как при достаточно больших  $r$  это поле является преобладающим, то именно им определяется поток излучаемой вибратором электромагнитной энергии.

Для оценки размеров ближней и дальней зон введем характерные длины:

$$a_1 = \min_{\{t\}} \frac{p_0 c}{|\dot{\mathbf{p}}|}, \quad a_2 = \min_{\{t\}} c \left( \frac{p_0}{|\ddot{\mathbf{p}}|} \right)^{1/2},$$

где  $p_0 = \max_{\{t\}} p(t)$ . Тогда с помощью (43.2) можно установить, что ближняя и дальняя зоны определяются соответственно неравенствами

$$r \ll \min \{a_1, a_2\}, \quad r \gg (a_2/a_1) \max \{a_1, a_2\}.$$

Замечая, что векторы  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $\mathbf{B}^{(2)}$ ,  $\mathbf{n}$  образуют ортогональную тройку:

$$\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}^{\text{изл}} = -\frac{1}{rc^2} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}], \quad \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}^{\text{изл}} = [\mathbf{B}^{\text{изл}} \mathbf{n}], \quad (43.6)$$

— нетрудно подсчитать вектор Пойнтинга (рис. 43.2):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}^{\text{изл}} \mathbf{B}^{\text{изл}}] = \frac{\mathbf{n}}{4\pi c^3 r^2} [\mathbf{n} \ddot{\mathbf{p}}]^2. \quad (43.7)$$

Интегрируя (43.7) по сфере радиуса  $r$ , находим мощность, излучаемую вибратором:

$$P_1 = \oint (\mathbf{nS}) r^2 d\Omega = \frac{2}{3c^3} \left| \ddot{\mathbf{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right|^2. \quad (43.8)$$

Особенность формулы (43.8) состоит в том, что  $\ddot{\mathbf{p}}$  необходимо брать в запаздывающий момент времени  $t' = t - r/c$ .

**Задача 43.1.** Показать, что импульс, уносимый электромагнитным излучением вибратора Герца, равен нулю.

Формулу (43.8) можно использовать для вычисления мощности излучения медленно движущегося одиночного заряда. В самом

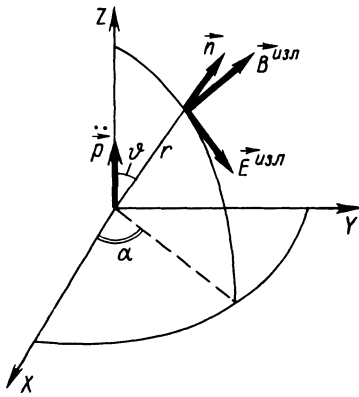


Рис. 43.2

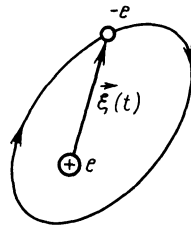


Рис. 43.3

деле, для этого достаточно рассмотреть диполь, один из зарядов которого неподвижен. Примером такой системы может служить атом водорода, в котором легкий электрон движется вокруг практически неподвижного тяжелого протона (рис. 43.3). Так как неподвижный заряд создает лишь статическое поле, то вся излучаемая энергия определяется подвижным зарядом  $e$ . Поэтому, полагая в (43.8)  $\mathbf{p} = e\dot{\xi}(t)$ , для мощности излучения одиночного заряда находим

$$P_1 = \frac{2}{3c^3} \left| e\ddot{\xi} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \left| \dot{\mathbf{v}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right|^2 \quad (43.9)$$

(формула Лармора).

Практический интерес представляет гармонический вибратор Герца, когда зависимость  $\mathbf{p}(t)$  имеет вид

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t. \quad (43.10)$$

Используя (43.2), находим

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega(t-r/c)}), \quad \mathbf{B} = \text{Re}(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega(t-r/c)}),$$

где амплитуды  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  удобно представить в виде разложения по степеням  $kr = \omega r/c = 2\pi r/\lambda$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= [3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0](1 - ikr)/r^3 - [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{p}_0]]k^2/r, \\ \mathbf{B}_0 &= [\mathbf{n}\mathbf{p}_0](1 - ikr)ik/r^2. \end{aligned} \quad (43.11)$$

При этом в ближней зоне ( $kr \ll 1$ ) получим\*

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla[(\mathbf{p}_0\mathbf{r})/r^3], \quad \mathbf{B}_0 = 0,$$

тогда как в волновой зоне ( $kr \gg 1$ )

$$\mathbf{E}_0 = k^2 [\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{p}_0]]/r, \quad \mathbf{B}_0 = [\mathbf{n}\mathbf{E}_0].$$

\* Нетрудно видеть, что при этом  $a_1 = a_2 = \lambda/(2\pi) = k^{-1}$ .

В этом случае мощность излучения равна

$$P_1 = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \cos^2 \omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (43.12)$$

или после усреднения по времени

$$\bar{P}_1 = \omega^4 p_0^2 / (3c^3) = (2\pi/\lambda)^4 (p_0^2 c/3). \quad (43.13)$$

Отметим важное для практики обстоятельство: мощность излучения вибратора обратно пропорциональна  $\lambda^4$ .

Полученные результаты можно применить и для расчета излучения простейшей антенны, для которой  $p(t) = le(t)$ ,  $\dot{p} = l\dot{I}$ . Считая ток возбуждения в антенне периодическим ( $I = I_0 \cos \omega t$ ), для средней мощности излучения найдем\*

$$\bar{P}_1 = \bar{I}^2 2l^2 \omega^2 / (3c^3) = \bar{I}^2 R_1, \quad (43.14)$$

где

$$R_1 \equiv \frac{2l^2 \omega^2}{3c^3} = \frac{2}{3c} \left( \frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2 \quad (43.15)$$

называется *сопротивлением излучения антенны* или ее *эквивалентным сопротивлением*, поскольку потери на излучение эквивалентны тепловым потерям на омическом сопротивлении  $R_1$ .

**Задача 43.2.** Рассчитать энергию, теряемую электроном при рассеянии на ядре с порядковым номером  $Z$ .

В качестве другого применения векторов Герца рассмотрим магнитный вибратор Герца, представляющий собой, например, небольшую рамку с током, обладающую магнитным моментом  $\mathbf{m}(t)$ . Рассматривая поле рамки на большом расстоянии от нее, магнитный момент можно считать точечным, т. е. положить  $\mathbf{M} = \mathbf{m}(t) \delta(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{P} = 0$ . Тогда с помощью (42.7) находим следующие векторы Герца:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{r} \mathbf{m} \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad \mathbf{\Pi} = 0. \quad (43.16)$$

Вычисление характеристик электромагнитного поля по векторам Герца (43.16) аналогично расчетам для электрического вибратора Герца, что позволяет использовать результаты последних, если в них совершить подстановку:  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m}$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$ . В итоге находим

$$\mathbf{E} = \frac{1}{cr} [\mathbf{n}\dot{\mathbf{m}}] + \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}],$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r^3} \left\{ 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{m}) - \mathbf{m} + \frac{r}{c} [3\mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{m}}) - \dot{\mathbf{m}}] + \frac{r^2}{c^2} [\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}]] \right\}. \quad (43.17)$$

\* В данном случае дипольное приближение применимо, если  $\lambda \gg l$  (см. § 44).

При этом мощность излучения равна

$$P_1 = 2(\ddot{\mathbf{m}})^2 / (3c^3). \quad (43.18)$$

Для монохроматического магнитного вибратора Герца

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \cos \omega t, \quad \mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}), \quad \mathbf{B} = \text{Re}(\mathbf{B}_0 e^{i(kr - \omega t)}),$$

где

$$\mathbf{E}_0 = -[\mathbf{nm}_0](1 - ikr) ik/r^2, \quad (43.19)$$

$$\mathbf{B}_0 = [3\mathbf{n}(\mathbf{nm}_0) - \mathbf{m}_0](1 - ikr)/r^3 - [\mathbf{n}[\mathbf{nm}_0]]k^2/r.$$

Усредненная по времени мощность излучения, очевидно, равна

$$\tilde{P}_1 = \omega^4 m_0^2 / (3c^3) = (m_0^2 c / 3)(2\pi/\lambda)^4. \quad (43.20)$$

Если в качестве примера взять рамочную антенну с током силой  $I = I_0 \cos \omega t$  и постоянной площадью рамки  $S$ , то ее магнитный момент равен  $m = IS/c$ , а средняя по времени мощность излучения

$$\tilde{P}_1 = \tilde{I}^2 2\omega^4 S^2 / (3c^5) = \tilde{I}^2 R_1, \quad (43.21)$$

где введено эквивалентное сопротивление антенны

$$R_1 = \frac{2\omega^4 S^2}{2c^5} = \frac{2}{3c} \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 S^2. \quad (43.22)$$

#### § 44. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим систему источников  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ , занимающую некоторую ограниченную область  $V$ , которую можно заключить в сферу конечного радиуса  $a$ . При подсчете мощности излучения этой системы уже на основании оценок типа (43.14) и (43.21) можно заключить, что следует исключить из рассмотрения статические части  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ . Поэтому систему можно заведомо считать *нейтральной*. Кроме того, если задаться некоторой минимальной допустимой мощностью излучения (порог чувствительности детектора), то следует исключить и низко-частотную составляющую источников  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ , т. е. можно считать, что их разложения в интеграл Фурье начинаются с некоторой минимальной частоты  $\omega_0$ :

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \int_{|\omega| \geq \omega_0} \exp(-i\omega t) \rho_\omega(\mathbf{r}) d\omega; \quad (44.1)$$

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \int_{|\omega| \geq \omega_0} \exp(-i\omega t) \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) d\omega.$$

Из закона сохранения заряда (41.1) выводим, что

$$-i\omega \rho_\omega + \text{div} \mathbf{j}_\omega = 0, \quad (44.2)$$