При этом мощность излучения равна

$$P_{\mathrm{I}}=2(\ddot{\mathbf{m}})^2/(3c^3). \tag{43.18}$$

Для монохроматического магнитного вибратора Герца

$$\mathbf{m}=\mathbf{m}_0\cos\omega t,\quad \mathbf{E}=\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_0 e^{i(kr-\omega t)}\right),\quad \mathbf{B}=\mathrm{Re}\left(\mathbf{B}_0 e^{i(kr-\omega t)}\right),$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_0=-[\mathbf{n}\mathbf{m}_0](1-ikr)ik/r^2,\\ \mathbf{B}_0=[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{m}_0)-\mathbf{m}_0](1-ikr)/r^3-[\mathbf{n}[\mathbf{n}\mathbf{m}_0]]k^2/r.\end{gathered} \tag{43.19}$$

Усредненная по времени мощность излучения, очевидно, равна

$$\tilde{P}_{\mathrm{I}}=\omega^4 m_0^2/(3c^3)=(m_0^2 c/3)(2\pi/\lambda)^4. \tag{43.20}$$

Если в качестве примера взять рамочную антенну с током силой $I=I_0\cos\omega t$ и постоянной площадью рамки S, то ее магнитный момент равен $m=IS/c$, а средняя по времени мощность излучения

$$\tilde{P}_{\mathrm{I}}=\tilde{I}^2\, 2\omega^4 S^2/(3c^5)=\tilde{I}^2 R_{\mathrm{I}}, \tag{43.21}$$

где введено эквивалентное сопротивление антенны

$$R_{\mathrm{I}}=\frac{2\omega^4 S^2}{2c^5}=\frac{2}{3c}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 S^2. \tag{43.22}$$

§ 44. МУЛЬТИПОЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим систему источников ρ, $\mathbf{j}$, занимающую некоторую ограниченную область V, которую можно заключить в сферу конечного радиуса a. При подсчете мощности излучения этой системы уже на основании оценок типа (43.14) и (43.21) можно заключить, что следует исключить из рассмотрения статические части ρ и $\mathbf{j}$. Поэтому систему можно заведомо считать *нейтральной*. Кроме того, если задаться некоторой минимальной допустимой мощностью излучения (порог чувствительности детектора), то следует исключить и низкочастотную составляющую источников ρ и $\mathbf{j}$, т. е. можно считать, что их разложения в интеграл Фурье начинаются с некоторой минимальной частоты ω_0:

$$\begin{gathered}\rho(t,\mathbf{r})=\int\limits_{|\omega|\geqslant\omega_0}\exp(-i\omega t)\,\rho_\omega(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\omega;\\ \mathbf{j}(t,\mathbf{r})=\int\limits_{|\omega|\geqslant\omega_0}\exp(-i\omega t)\,\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})\,\mathrm{d}\omega.\end{gathered} \tag{44.1}$$

Из закона сохранения заряда (41.1) выводим, что

$$-i\omega\rho_\omega+\mathrm{div}\,\mathbf{j}_\omega=0, \tag{44.2}$$

т. е. справедливо верное для нейтральных систем представление

$$\rho(t, \mathbf{r}) = -\operatorname{div} \int\limits_{|\omega| \geqslant \omega_0} \frac{i}{\omega} \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)\, d\omega. \tag{44.3}$$

Производя также разложение в интеграл Фурье запаздывающих потенциалов (41.24), представим их фурье-образы в виде

$$\varphi_\omega(\mathbf{r}) = \int\limits_V \rho_\omega(\mathbf{r}') \frac{\exp(ikR)}{R} dV', \quad \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \int\limits_V \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') \frac{\exp(ikR)}{cR} dV', \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{44.4}$$

Если нас интересует поле вне системы источников, т. е. при $r > a$, то можно воспользоваться разложением в ряд Тейлора

$$\frac{\exp(ikR)}{R} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (-\mathbf{r}' \cdot \nabla)^l \frac{\exp(ikr)}{r}. \tag{44.5}$$

Подставляя (44.5) в (44.4), получаем мультипольное разложение запаздывающих потенциалов, которое с учетом нейтральности системы принимает вид

$$\begin{gathered} \varphi_\omega(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \int\limits_V \rho_\omega(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\nabla)^l \frac{\exp(ikr)}{r} dV', \\ \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{cl!} \int\limits_V \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')(\mathbf{r}'\nabla)^l \frac{\exp(ikr)}{r} dV'. \end{gathered} \tag{44.6}$$

Вводя фурье-образы тензоров электрического и магнитного мультипольных моментов

$$Q_\omega^{i_1 \ldots i_l} \equiv \int\limits_V \rho_\omega(\mathbf{r}') x'^{i_1} \ldots x'^{i_l} dV', \tag{44.7}$$

$$\mathscr{M}_\omega^{i_1 \ldots i_l} \equiv \frac{1}{c} \int\limits_V \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') x'^{i_1} \ldots x'^{i_l} dV', \tag{44.8}$$

разложение (44.6) можно переписать в координатной форме:

$$\begin{gathered} \varphi_\omega(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} Q_\omega^{i_1 \ldots i_l} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} \frac{\exp(ikr)}{r}, \\ \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \mathscr{M}_\omega^{i_1 \ldots i_l} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} \frac{\exp(ikr)}{r}. \end{gathered} \tag{44.9}$$

Рассмотрим теперь поведение потенциалов в *волновой зоне*, т. е. в области, где выполнено неравенство

$$kr \gg 1. \tag{44.10}$$

Так как $|\omega| \geqslant \omega_0 \equiv k_0 c$, то (44.10) вытекает из условия

$$k_0 r \gg 1, \tag{44.11}$$

при выполнении которого можно положить

$$(\mathbf{r}'\nabla)^l \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} \approx \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\left[ik(\mathbf{n}\mathbf{r}')\right]^l \equiv \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\left[i(\mathbf{k}\mathbf{r}')\right]^l,$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{r}/r$, $\mathbf{k}=k\mathbf{n}$. Но тогда разложение (44.5) принимает вид

$$\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\left[-i(\mathbf{k}\mathbf{r}')\right]^l \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r} = \frac{\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\mathbf{R})}}{r}. \tag{44.12}$$

Подстановка (44.12) в (44.4) дает представление фурье-образов потенциалов в волновой зоне:

$$\varphi_\omega(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{r}\int\limits_V \rho_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\mathbf{R})}\mathrm{d}V'; \quad \mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{rc}\int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\mathbf{R})}\mathrm{d}V', \tag{44.13}$$

откуда преобразованием Фурье получаются сами потенциалы

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r}) &\approx \frac{1}{r}\int\limits_V \rho\left[t-\frac{(\mathbf{n}\mathbf{R})}{c}, \mathbf{r}'\right]\mathrm{d}V', \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &\approx \frac{1}{rc}\int\limits_V \mathbf{j}\left[t-\frac{(\mathbf{n}\mathbf{R})}{c}, \mathbf{r}'\right]\mathrm{d}V', \end{aligned} \tag{44.14}$$

а также их мультипольное разложение:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r}) &\equiv \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l \approx \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{rl!}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^l Q^{i_1 \ldots i_l}\left(t-\frac{r}{c}\right) n_{i_1} \ldots n_{i_l}, \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \mathbf{A}_l \approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{rl!}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)^l \mathscr{M}^{i_1 \ldots i_l}\left(t-\frac{r}{c}\right) n_{i_1} \ldots n_{i_l}. \end{aligned} \tag{44.15}$$

Задача 44.1. *Показать, что в волновой зоне между потенциалами* φ *и* $\mathbf{A}$, *а также между их мультипольными членами* φ_l *и* $\mathbf{A}_l$ *выполняется связь*

$$\varphi = (\mathbf{n}\mathbf{A}), \quad \varphi_l = (\mathbf{n}\mathbf{A}_{l-1}). \tag{44.16}$$

Из (44.13) следует, что ряды в (44.15) сходятся тем быстрее, чем лучше выполнено неравенство $ka \ll 1$, поскольку отношение последовательных мультипольных членов по порядку величины равно

$$|A_l / A_{l-1}| \sim |\varphi_{l+1} / \varphi_l| \sim ka,$$

где предполагается, что частота $\omega = kc$ дает наиболее существенный вклад в фурье-разложение потенциалов.

Используя полученные представления для потенциалов, нетрудно вычислить в волновой зоне векторы **E** и **B**. При этом [см. (44.14)] можно пользоваться правилом

$$\nabla = -\frac{\mathbf{n}}{c}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{44.17}$$

В итоге получаем

$$\mathbf{B}^{\text{изл}} = -\frac{1}{c}\left[\mathbf{n}\dot{\mathbf{A}}\right], \quad \mathbf{E}^{\text{изл}} = -\left[\mathbf{n}\mathbf{B}^{\text{изл}}\right], \tag{44.18}$$

где **A** определяется выражением (44.15). Аналогично получаем в волновой зоне и вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{n}}{4\pi c}\left[\mathbf{n}\dot{\mathbf{A}}\right]^2. \tag{44.19}$$

Задача 44.2. *Показать, что если в разложении* (44.15) *ограничиться двумя первыми членами*, что допустимо при выполнении условий типа* $|\dot{\rho}|a \ll c|\rho|$, *то мощность излучения может быть представлена в виде суммы электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений:*

$$P_{\mathrm{I}} = \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathbf{p}})^2 + \frac{2}{3c^3}(\ddot{\mathbf{m}})^2 + \frac{1}{60c^5}\left[3\dddot{\hat{\mathrm{Q}}} : \dddot{\hat{\mathrm{Q}}} - (\mathrm{Sp}\,\dddot{\hat{\mathrm{Q}}})^2\right]. \tag{44.20}$$

Исходя из соотношений (44.2) и (44.16), можно утверждать, что электрический 2^l-поль будет давать мощность излучения того же порядка, что магнитный 2^{l-1}-поль, при условии, что соответствующие мультипольные моменты отличны от нуля. Это обстоятельство имеет большое практическое значение и часто используется при оценке мощности излучения реальных систем.

§ 45. ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

Пусть имеется линейная антенна длины l, в которой возбуждается ток частоты ω. Направляя ось Z вдоль антенны и замечая, что на ее концах $\mathbf{j} = 0$, исследуем тот простейший случай, когда в антенне возбуждена гармоническая стоячая волна тока плотностью

$$\mathbf{j} = \mathbf{I}_0 \sin\left[\pi N(z/l + 1/2)\right]\delta(x)\delta(y)\exp(-i\omega t), \tag{45.1}$$

где $\mathbf{I}_0 = I_0\mathbf{e}_z$; N — некоторое целое число, определяющее тип возбуждения антенны. Особый интерес представляет резонансное

---

* Как заметил В. М. Дубовик, необходимо учитывать и третий член в разложении (44.15). При этом в системах с тороидностью $\mathbf{T}$ (см. задачу **29.1**) возникает дополнительная мощность излучения $P_{\mathrm{I}}' = (8/27)c^{-4}\dddot{\mathbf{T}}\cdot(\dddot{\mathbf{T}} - 3\ddot{\mathbf{p}})$.