

где предполагается, что частота $\omega = kc$ дает наиболее существенный вклад в фурье-разложение потенциалов.

Используя полученные представления для потенциалов, нетрудно вычислить в волновой зоне векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} . При этом [см. (44.14)] можно пользоваться правилом

$$\nabla = -\frac{\mathbf{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (44.17)$$

В итоге получаем

$$\mathbf{B}^{\text{изл}} = -\frac{1}{c} [\mathbf{n}\dot{\mathbf{A}}], \quad \mathbf{E}^{\text{изл}} = -[\mathbf{n}\mathbf{B}^{\text{изл}}], \quad (44.18)$$

где \mathbf{A} определяется выражением (44.15). Аналогично получаем в волновой зоне и вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{n}}{4\pi c} [\mathbf{n}\dot{\mathbf{A}}]^2. \quad (44.19)$$

Задача 44.2. Показать, что если в разложении (44.15) ограничиться двумя первыми членами*, что допустимо при выполнении условий типа $|\dot{\rho}|a \ll c|\rho|$, то мощность излучения может быть представлена в виде суммы электрического дипольного, магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений:

$$P_1 = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{p}})^2 + \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{m}})^2 + \frac{1}{60c^5} [3\ddot{\mathbf{Q}} : \ddot{\mathbf{Q}} - (\text{Sp } \ddot{\mathbf{Q}})^2]. \quad (44.20)$$

Исходя из соотношений (44.2) и (44.16), можно утверждать, что электрический 2^l -поль будет давать мощность излучения того же порядка, что магнитный 2^{l-1} -поль, при условии, что соответствующие мультипольные моменты отличны от нуля. Это обстоятельство имеет большое практическое значение и часто используется при оценке мощности излучения реальных систем.

§ 45. ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

Пусть имеется линейная антенна длины l , в которой возбуждается ток частоты ω . Направляя ось Z вдоль антенны и замечая, что на ее концах $\mathbf{j} = 0$, исследуем тот простейший случай, когда в антенне возбуждена гармоническая стоячая волна тока плотностью

$$\mathbf{j} = \mathbf{I}_0 \sin [\pi N (z/l + 1/2)] \delta(x) \delta(y) \exp(-i\omega t), \quad (45.1)$$

где $\mathbf{I}_0 = I_0 \mathbf{e}_z$; N — некоторое целое число, определяющее тип возбуждения антенны. Особый интерес представляет резонансное

* Как заметил В. М. Дубовик, необходимо учитывать и третий член в разложении (44.15). При этом в системах с тороидностью $\mathbf{T} \dots$ (см. задачу 29.1) возникает дополнительная мощность излучения $P'_1 = (8/27)c^{-4} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{T} - 3\mathbf{p})$.

возбуждение, когда $k \equiv \omega/c = \pi N/l$. В этом случае N представляет собой число полуволн тока, укладываемых в длине антенны.

В соответствии с (44.3) можно принять

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t, \quad \mathbf{P} = i\mathbf{j} / \omega \quad (45.2)$$

и ввести электрический вектор Герца $\mathbf{\Pi}$, который в волновой зоне [см. (44.14)] может быть записан в виде

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{i}{\omega r} \int \mathbf{j} \left[t - \frac{(\mathbf{nR})}{c}, \mathbf{r}' \right] dV'. \quad (45.3)$$

Подставляя (45.1) в (45.3), находим

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{i}{\omega r} \mathbf{I}_0 e^{-i\omega t} \int_{-l/2}^{+l/2} \sin \left[\pi N \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2} \right) \right] e^{i(\mathbf{kR})} dz'. \quad (45.4)$$

Используя сферические координаты, начало которых помещено в середину антенны, имеем $(\mathbf{kR}) = k(r - z' \cos \vartheta)$, и (45.4) принимает вид

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{i}{\omega r} \mathbf{I}_0 e^{-i\omega(t-r/c)} \int_{-l/2}^{+l/2} \sin \left[\pi N \left(\frac{z'}{l} + \frac{1}{2} \right) \right] e^{-ikz' \cos \vartheta} dz'. \quad (45.5)$$

Вычислим интеграл (45.5):

$$\mathbf{\Pi} \approx \frac{2\pi N}{l\omega r} \mathbf{I}_0 e^{-i\omega(t-r/c)} e^{i\pi N/2} \frac{\sin [\pi N/2 - (kl/2) \cos \vartheta]}{(\pi N/l)^2 - k^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (45.6)$$

Заметим, что $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{\Pi}}/c = -ik\mathbf{\Pi}$. Поэтому [см. (44.19)] усредненная по времени угловая плотность мощности излучения равна

$$\frac{d\tilde{P}_1}{d\Omega} = r^2 |\tilde{\mathbf{S}}| = r^2 \frac{k^2 c}{4\pi} [\mathbf{n}\tilde{\mathbf{A}}]^2 = r^2 \frac{k^4 c}{4\pi} [\mathbf{n}\tilde{\mathbf{\Pi}}]^2,$$

или с учетом (45.6)

$$\frac{d\tilde{P}_1}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \left(k \frac{\pi N}{l} \right)^2 \sin^2 \vartheta \frac{\sin^2 [\pi N/2 - (kl/2) \cos \vartheta]}{[(\pi N/l)^2 - k^2 \cos^2 \vartheta]^2}. \quad (45.7)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай резонансного излучения, когда $k = \pi N/l$ и (45.7) принимает вид

$$\frac{d\tilde{P}_1}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2 [\pi N \sin^2(\vartheta/2)]}{\sin^2 \vartheta}. \quad (45.8)$$

Из (45.8) видно, что минимумы излучения определяются условием $\sin [\pi N \sin^2(\vartheta/2)] = 0$, откуда

$$\vartheta_m = 2 \arcsin \sqrt{m/N}; \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (45.9)$$

т. е. число минимумов равно $N+1$, а число максимумов совпадает с N и равно, таким образом, числу полуволн, укладываемыхся

в длине антенны. Угловое распределение мощности излучения (диаграмма направленности) для $N=1, 2, 3$ изображено на рис. 45.1.

Если N велико ($N \gg 1$), то первый максимум излучения приходится на угол $\vartheta \approx \vartheta_1/2 \approx N^{-1/2}$. В этом случае

$$\frac{\sin[\pi N \sin^2(\vartheta/2)]}{\sin \vartheta} \approx \sqrt{\frac{N}{2}},$$

в то время как для центрального максимума (если $N=2n+1$) $\vartheta = \pi/2$, т. е.

$$\frac{\sin[\pi N \sin^2(\vartheta/2)]}{\sin \vartheta} = \pm 1.$$

Поэтому интенсивность первого бокового лепестка излучения антенны больше интенсивности центрального лепестка в $N/2$ раз, т. е. в основном излучение идет в направлении проводника антенны, который играет в этом случае роль ведущей линии (волновода).

Усредненная по времени полная мощность излучения антенны [см. (45.8)] равна

$$\tilde{P}_1 = \oint \frac{d\tilde{P}_1}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{2} R_1 I_0^2, \quad (45.10)$$

где сопротивление излучения

$$R_1 = \frac{2}{c} \int_0^\pi \sin^2\left(\pi N \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (45.11)$$

Заменой переменной $2\pi N \sin^2(\vartheta/2) = x$ (45.11) приводится к виду

$$R_1 = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi N} (1 - \cos x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{c} [\ln(2\pi N \gamma) - \text{Ci}(2\pi N)], \quad (45.12)$$

где $\gamma = 1,7811\dots$ — постоянная Эйлера, а $\text{Ci}(x) = -\int_x^\infty \cos x \frac{dx}{x}$ — интегральный косинус.

Пренебрегая при $N \gg 1$ малым членом $\text{Ci}(2\pi N)$, получим

$$R_1 \approx \ln(2\pi N \gamma) / c. \quad (45.13)$$

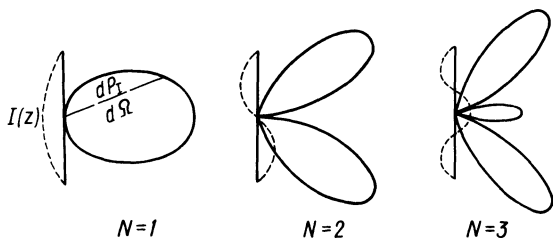


Рис. 45.1