§ 46. ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА

Пусть точечный заряд e движется по заданной траектории $\mathbf{r}=\xi(t)$ со скоростью $\mathbf{v}(t)=\dot{\xi}(t)$. Для описания электромагнитного поля, порождаемого таким зарядом, введем плотности заряда и тока:

$$\rho(t, \mathbf{r})=e\delta[\mathbf{r}-\xi(t)]; \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r})=e\mathbf{v}(t)\delta[\mathbf{r}-\xi(t)]. \tag{46.1}$$

Кроме того, предположим, что применимо запаздывающее решение уравнений поля, т. е. отсутствует как излучение, приходящее из бесконечности, так и тепловое излучение («температура» вакуума равна нулю).

В данном случае удобнее записать запаздывающие потенциалы в форме (41.13), воспользовавшись запаздывающей функцией Грина (41.19):

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r})&=c\int\rho(t', \mathbf{r}')R^{-1}\delta(R-cT)\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t'; \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r})&=\int\mathbf{j}(t', \mathbf{r}')R^{-1}\delta(R-cT)\,\mathrm{d}V'\,\mathrm{d}t', \end{aligned} \tag{46.2}$$

где $T=t-t'$, $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Подставляя (46.1) в (46.2) и выполняя объемное интегрирование с учетом свойств δ-функции, находим:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathbf{r})&=e\int\delta\left[t'-t+\frac{1}{c}R(t', \mathbf{r})\right]R^{-1}(t', \mathbf{r})\,\mathrm{d}t'; \\ \mathbf{A}(t, \mathbf{r})&=\frac{e}{c}\int\delta\left[t'-t+\frac{1}{c}R(t', \mathbf{r})\right]\mathbf{v}(t')R^{-1}(t', \mathbf{r})\,\mathrm{d}t', \end{aligned} \tag{46.3}$$

где $R(t', \mathbf{r})=|\mathbf{r}-\xi(t')|=|\mathbf{R}|$.

Используем свойство (3.8) δ-функции, согласно которому для всякой функции $f(t')$, имеющей однократные нули $t'=t_i$, справедливо представление

$$\delta[f(t')]=\sum_i\frac{\delta(t'-t_i)}{|f'(t_i)|}. \tag{46.4}$$

В данном случае

$$f(t')=t'-t+R(t', \mathbf{r})/c, \tag{46.5}$$

поэтому

$$f'(t')=1-(\mathbf{n}\mathbf{v})/c, \tag{46.6}$$

где $\mathbf{n}=\mathbf{R}/R$. Если считать, что заряд движется со скоростью $v<c$, то $f'(t')>0$. При этом функция $f(t')$ монотонна и уравнение $f(t')=0$ имеет единственный корень $t'=\zeta$:

$$\zeta=t-R(\zeta, \mathbf{r})/c. \tag{46.7}$$

Таким образом, согласно (46.4) и (46.6), имеем

$$\delta[t'-t+R(t', \mathbf{r})/c]=\delta(t'-\zeta)[1-(\mathbf{n}\mathbf{v})/c]^{-1}. \tag{46.8}$$

Подставляя (46.8) в (46.3), преобразуем запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(t,\ \mathbf{r})=\frac{ec}{[cR-(\mathbf{vR})]_\zeta};\quad \mathbf{A}(t,\ \mathbf{r})=\left[\frac{e\mathbf{v}}{cR-(\mathbf{vR})}\right]_\zeta \tag{46.9}$$

(*потенциалы Льенара — Вихерта*). Здесь индекс ζ означает, что выражение в скобках берется в запаздывающий момент времени, определяемый уравнением (46.7). Особенность формулы (46.9) состоит в том, что электромагнитные потенциалы в точке наблюдения $\mathbf{r}$ в момент времени t определяются положением и скоростью заряда в некоторый предшествующий момент времени $\zeta(t,\ \mathbf{r})$, вычисляемый из (46.7).

С помощью потенциалов Льенара — Вихерта нетрудно вычислить векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Замечая, что

$$\partial\zeta/\partial t=[1-(\mathbf{nv}/c]^{-1},\quad \nabla\zeta=-\mathbf{n}[c-(\mathbf{nv})]^{-1}, \tag{46.10}$$

находим последовательно, опуская индекс запаздывания ζ:

$$\nabla(\mathbf{vR})=\mathbf{v}+\nabla\zeta\partial(\mathbf{vR})/\partial\zeta=\mathbf{v}-\mathbf{n}[(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R})-v^2][c-(\mathbf{nv})]^{-1},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}=[\nabla\zeta\dot{\mathbf{v}}]=-[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}][c-(\mathbf{nv})]^{-1},$$

$$-\nabla\varphi=\frac{ec}{[cR-(\mathbf{vR})]^2}\nabla[cR-(\mathbf{vR})]=$$

$$=\frac{ec}{R^2[c-(\mathbf{nv})]^2}\left[-\mathbf{v}+\mathbf{n}\frac{c^2-v^2+(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R})}{c-(\mathbf{nv})}\right],$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{e\dot{\mathbf{v}}}{R[c-(\mathbf{nv})]^2}-$$

$$-\frac{e\mathbf{v}}{R^2[c-(\mathbf{nv})]^3}[c(\mathbf{nv})+(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R})-v^2];$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=c^{-1}\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{v})=(\varphi/c)\operatorname{rot}\mathbf{v}+c^{-1}[\nabla\varphi\mathbf{v}]=$$

$$=-\frac{e[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}]}{R[c-(\mathbf{nv})]^2}-\frac{e[\mathbf{nv}]}{R^2[c-(\mathbf{nv})]^3}[c^2-v^2+(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R})].$$

В результате получаем

$$\mathbf{E}=e\left\{\frac{(c^2-v^2)(c\mathbf{n}-\mathbf{v})}{[c-(\mathbf{nv})]^3R^2}+\frac{[\mathbf{n}[(c\mathbf{n}-\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}}]]}{[c-(\mathbf{nv})]^3R}\right\}_\zeta; \tag{46.11}$$

$$\mathbf{B}=[\mathbf{nE}]_\zeta. \tag{46.12}$$

Для подсчета мощности, теряемой неравномерно движущимся зарядом на излучение, нужно составить выражение для вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ и оставить в нем члены, обратно пропорциональные R^2, поскольку интегрирование будет производиться по бесконечно удаленной поверхности. Иначе говоря, необходимо рассмотреть волновую зону. Так как в ней поле поперечно, т. е. удовлетворяет условию $(\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{изл}})=0$, то вектор Пойнтинга имеет вид

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{n}\left(\mathbf{E}^{\text{изл}}\right)^2, \tag{46.13}$$

где

$$\mathbf{E}^{\text{изл}}=e\left\{\frac{[\mathbf{n}[(c\mathbf{n}-\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}}]]}{[c-(\mathbf{n}\mathbf{v})]^3 R}\right\}_\zeta. \tag{46.14}$$

Подставляя (46.14) в (46.13), для углового распределения мощности излучения $\mathrm{d}P_{\mathrm{I}}/\mathrm{d}\Omega=(\mathbf{n}\mathbf{S})R^2$ находим выражение

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2c}{4\pi}\left\{\frac{(\dot{\mathbf{v}})^2}{[c-(\mathbf{n}\mathbf{v})]^4}+\frac{2(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{[c-(\mathbf{n}\mathbf{v})]^5}-(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2\frac{c^2-v^2}{[c-(\mathbf{n}\mathbf{v})]^6}\right\}_\zeta. \tag{46.15}$$

Интегрируя (46.15) по бесконечно удаленной замкнутой поверхности, можно получить полную мощность излучения P_{I}, однако она не совпадет с истинными потерями энергии заряда на излучение. Чтобы понять, почему это так, окружим заряд некоторой замкнутой и жестко связанной с ним поверхностью, например сферой радиуса R с центром в точке нахождения заряда в запаздывающий момент времени ζ. Очевидно, что поток энергии сквозь такую поверхность и определяет истинные потери энергии заряда P_{E}. Но так как поверхность перемещается в пространстве со скоростью $\mathbf{v}$ заряда, то поток энергии сквозь нее определяется не только вектором Пойнтинга, но еще и переносной плотностью потока энергии, равной $-w\mathbf{v}$. Таким образом, результирующая плотность потока энергии сквозь поверхность определяется вектором

$$\mathbf{S}'=\mathbf{S}-w\mathbf{v}. \tag{46.16}$$

Замечая, что для поля излучения плотность энергии равна

$$w=\left(\mathbf{E}^{\text{изл}}\right)^2/(4\pi)=(\mathbf{n}\mathbf{S})/c,$$

для скорости потерь энергии зарядом в данном направлении найдем

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}\Omega}=R^2(\mathbf{n}\mathbf{S}')=R^2(\mathbf{n}\mathbf{S})\left[1-\frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right]=\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\Omega}\left[1-\frac{(\mathbf{n}\mathbf{v})}{c}\right], \tag{46.17}$$

или с учетом (46.10)

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{E}}}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\zeta=\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}t. \tag{46.18}$$

Таким образом, если некоторая порция электромагнитной энергии была испущена зарядом за время $\mathrm{d}\zeta$, то в точке наблюдения она регистрируется за время $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\zeta[1-(\mathbf{n}\mathbf{v})/c]$.

Это обстоятельство позволяет записать скорость потерь энергии зарядом на излучение в виде

$$P_{\mathrm{E}}=-\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{\text{изл}}. \tag{46.19}$$

Задача 46.1. *Показать, что полная мощность излучения и скорость потерь энергии на излучение точечным зарядом e имеют вид*

$$P_{\mathrm{I}}=\frac{2e^2c}{15}\left\{(\dot{\mathbf{v}})^2\frac{c^2(5c^2+v^2)}{(c^2-v^2)^4}-2[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2\frac{2c^2+v^2}{(c^2-v^2)^4}\right\}_\zeta, \tag{46.20}$$

$$P_{\mathrm{E}}=\frac{2e^2c}{3}\left\{(\dot{\mathbf{v}})^2\frac{c^2}{(c^2-v^2)^3}-[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2(c^2-v^2)^{-3}\right\}_\zeta. \tag{46.21}$$

Соотношение (46.21) впервые было получено *А. Льенаром* в 1898 г. Нетрудно видеть, что в пределе $v/c\to 0$

$$P_{\mathrm{I}}\to P_{\mathrm{E}}\to\frac{2e^2}{3c^3}(\dot{\mathbf{v}})^2_\zeta, \tag{46.22}$$

т. е. получается уже известный нам результат Лармора (43.9). В этом случае в волновой зоне

$$\mathbf{E}^{\text{изл}}=\frac{e}{c^2}\left\{\frac{1}{R}[\mathbf{n}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}]]\right\}_\zeta,\quad \mathbf{B}^{\text{изл}}=[\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{изл}}]_\zeta, \tag{46.23}$$

что соответствует дипольному излучению, описываемому вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{\mathbf{n}}{R^2}(\dot{\mathbf{v}})^2\sin^2\vartheta\right\}_\zeta. \tag{46.24}$$

В том случае, когда $v\to c$, наблюдается резкая анизотропия излучения. Так, $\mathbf{E}^{\text{изл}}\sim(1-v/c)^{-2}\to\infty$ в направлении движения заряда, т. е. при $\mathbf{n}=\mathbf{v}/v$, и $\mathbf{E}^{\text{изл}}$ конечно при $\mathbf{n}=-\mathbf{v}/v$. Это говорит о том, что излучение в основном направлено вперед, будучи сосредоточенным в узком конусе вблизи вектора скорости частицы. Примером такого направленного излучения может служить *синхротронное излучение*, испускаемое ультрарелятивистским зарядом, движущимся в магнитном поле со скоростью, приближающейся к световой.

Задача 46.2. *Показать, что максимум излучения ультрарелятивистской частицы приходится на направление, составляющее с вектором скорости* $\mathbf{v}$ *угол*

$$\vartheta\approx a(\alpha)(1-v^2/c^2)^{1/2}, \tag{46.25}$$

где $a(\alpha)$ — *коэффициент, зависящий от угла* α *между векторами* $\mathbf{v}$ *и* $\dot{\mathbf{v}}$. *В частности, если* $\alpha\approx\pi/2$, *то* $a=(\sqrt{34}-1)^{1/2}/\sqrt{3}$, *если же* $\alpha\neq\pi/2$, *то* $a=\sqrt{7/2}$.

Задача 46.3. *Найти потенциалы* φ, $\mathbf{A}$ *электромагнитного поля, создаваемого точечным зарядом e, движущимся с постоянной скоростью* $\mathbf{v}$. *Рассмотреть также гипотетический случай сверхсветовой скорости* $v>c$.

§ 47. СИЛА РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим заряженную частицу с энергией E и импульсом $\mathbf{P}$, взаимодействующую с электромагнитным полем, занимающим некоторую область V, граничную поверхность которой S мы впоследствии расширим до бесконечности. Запишем, основываясь