Задача 46.1. *Показать, что полная мощность излучения и скорость потерь энергии на излучение точечным зарядом e имеют вид*

$$P_{\mathrm{I}}=\frac{2e^2c}{15}\left\{(\dot{\mathbf{v}})^2\frac{c^2(5c^2+v^2)}{(c^2-v^2)^4}-2[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2\frac{2c^2+v^2}{(c^2-v^2)^4}\right\}_\zeta, \tag{46.20}$$

$$P_{\mathrm{E}}=\frac{2e^2c}{3}\left\{(\dot{\mathbf{v}})^2\frac{c^2}{(c^2-v^2)^3}-[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}]^2(c^2-v^2)^{-3}\right\}_\zeta. \tag{46.21}$$

Соотношение (46.21) впервые было получено *А. Льенаром* в 1898 г. Нетрудно видеть, что в пределе $v/c\to 0$

$$P_{\mathrm{I}}\to P_{\mathrm{E}}\to\frac{2e^2}{3c^3}(\dot{\mathbf{v}})^2_\zeta, \tag{46.22}$$

т. е. получается уже известный нам результат Лармора (43.9). В этом случае в волновой зоне

$$\mathbf{E}^{\text{изл}}=\frac{e}{c^2}\left\{\frac{1}{R}[\mathbf{n}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}]]\right\}_\zeta,\quad \mathbf{B}^{\text{изл}}=[\mathbf{n}\mathbf{E}^{\text{изл}}]_\zeta, \tag{46.23}$$

что соответствует дипольному излучению, описываемому вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{\mathbf{n}}{R^2}(\dot{\mathbf{v}})^2\sin^2\vartheta\right\}_\zeta. \tag{46.24}$$

В том случае, когда $v\to c$, наблюдается резкая анизотропия излучения. Так, $\mathbf{E}^{\text{изл}}\sim(1-v/c)^{-2}\to\infty$ в направлении движения заряда, т. е. при $\mathbf{n}=\mathbf{v}/v$, и $\mathbf{E}^{\text{изл}}$ конечно при $\mathbf{n}=-\mathbf{v}/v$. Это говорит о том, что излучение в основном направлено вперед, будучи сосредоточенным в узком конусе вблизи вектора скорости частицы. Примером такого направленного излучения может служить *синхротронное излучение*, испускаемое ультрарелятивистским зарядом, движущимся в магнитном поле со скоростью, приближающейся к световой.

Задача 46.2. *Показать, что максимум излучения ультрарелятивистской частицы приходится на направление, составляющее с вектором скорости* $\mathbf{v}$ *угол*

$$\vartheta\approx a(\alpha)(1-v^2/c^2)^{1/2}, \tag{46.25}$$

где $a(\alpha)$ — *коэффициент, зависящий от угла* α *между векторами* $\mathbf{v}$ *и* $\dot{\mathbf{v}}$. *В частности, если* $\alpha\approx\pi/2$, *то* $a=(\sqrt{34}-1)^{1/2}/\sqrt{3}$, *если же* $\alpha\neq\pi/2$, *то* $a=\sqrt{7/2}$.

Задача 46.3. *Найти потенциалы* φ, $\mathbf{A}$ *электромагнитного поля, создаваемого точечным зарядом e, движущимся с постоянной скоростью* $\mathbf{v}$. *Рассмотреть также гипотетический случай сверхсветовой скорости* $v>c$.

§ 47. СИЛА РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим заряженную частицу с энергией E и импульсом $\mathbf{P}$, взаимодействующую с электромагнитным полем, занимающим некоторую область V, граничную поверхность которой S мы впоследствии расширим до бесконечности. Запишем, основываясь на теореме Пойнтинга, закон сохранения энергии для данной системы:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E+W)=-\oint\limits_S(\mathbf{nS})\,\mathrm{d}S=-P_{\mathrm{I}}, \tag{47.1}$$

где W — энергия электромагнитного поля в области V, а P_{I} — мощность излучения. Для оценки P_{I} воспользуемся дипольным приближением, допустив, что вклад высших мультипольных моментов ничтожно мал. Наконец, будем считать скорость заряда малой по сравнению со скоростью света ($v \ll c$). В таком случае [см. (43.9)], приняв, что поверхность S — сфера бесконечно большого радиуса R, в центре которой расположен заряд e, имеем

$$P_{\mathrm{I}}=\frac{2e^2}{3c^3}\left[\dot{\mathbf{v}}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]^2. \tag{47.2}$$

С другой стороны, при $v \ll c$, согласно (46.10), $\mathrm{d}\zeta \approx \mathrm{d}t$, что позволяет перейти в (47.1) от времени наблюдения t к времени испускания излучения $\zeta = t - R/c$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}(E+W)=-\frac{2e^2}{3c^3}[\dot{\mathbf{v}}(\zeta)]^2. \tag{47.3}$$

Наконец, используя результат задачи **43.1**, запишем еще и закон сохранения импульса для системы:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{P}+\mathbf{G})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}(\mathbf{P}+\mathbf{G})=0, \tag{47.4}$$

где $\mathbf{G}$ — импульс электромагнитного поля в области V. Из соотношений (47.3) и (47.4) вытекает, что всякий излучающий заряд должен испытывать дополнительную силу со стороны испускаемого им электромагнитного поля. Согласно (47.4), эта сила, обычно называемая *силой реакции излучения*, равна

$$\mathbf{F}_{\mathrm{R}}=\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}\zeta=-\mathrm{d}\mathbf{G}/\mathrm{d}\zeta, \tag{47.5}$$

где $\mathbf{G}$ — импульс электромагнитного поля, порожденного зарядом.

Замечая, что, по теореме живых сил, $\mathrm{d}E=(\mathbf{v}\mathrm{d}\mathbf{P})$, из (47.5) и (47.3) выводим

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^2+(\mathbf{v}\mathbf{F}_{\mathrm{R}}). \tag{47.6}$$

Так как левая часть (47.6) имеет вид полной производной, то наиболее общее решение этого уравнения относительно $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}$ есть

$$\mathbf{F}_{\mathrm{R}}=\nabla U(\mathbf{r})+[\mathbf{vK}]+\frac{2e^2}{3c^3}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{v}}{\mathrm{d}\zeta^2}, \tag{47.7}$$

где $\mathbf{K}$ — произвольный вектор, $U(\mathbf{r})$ — произвольная скалярная функция точки. Но, согласно (47.5), $\mathbf{F}_\mathrm{R} = -\mathrm{d}\mathbf{G}/\mathrm{d}\zeta$, т. е. имеет вид полной производной. В связи с этим в (47.7) следует положить $U = \mathbf{K} = 0$ и оставить член $2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3)$, определяемый состоянием движения самого заряда и описывающий силу реакции излучения

$$\mathbf{F}_\mathrm{R} = 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \tag{47.8}$$

Если заряженная частица имеет массу m и движется в поле внешних сил $\mathbf{F}$, то с учетом силы реакции излучения (47.8) уравнение ее движения можно записать в виде

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \tag{47.9}$$

Чтобы проиллюстрировать, к каким изменениям в характере движения частицы приводит учет силы реакции излучения, рассмотрим случай однородной внешней силы $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$. Вводя обозначения $2e^2/(3mc^3) \equiv \varkappa$, $\mathbf{F}/m \equiv \mathbf{g}(t)$, перепишем уравнение движения (47.9) в виде

$$\dot{\mathbf{v}} - \varkappa\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(t). \tag{47.10}$$

Для решения этого уравнения найдем сначала функцию Грина задачи $G(T)$, где $T = t - t'$. Последняя удовлетворяет уравнению

$$\dot{G} - \varkappa\ddot{G} = \delta(T). \tag{47.11}$$

Замечая, что G задана с точностью до постоянной и при $T \neq 0$ удовлетворяет однородному уравнению $\dot{G} - \varkappa\ddot{G} = 0$ с решением

$$G_0(T) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{T/\varkappa},$$

будем искать функцию Грина в виде

$$G(T) = C_1\mathrm{e}^{T/\varkappa} + \theta(T)(C_2\mathrm{e}^{T/\varkappa} + C_3). \tag{47.12}$$

Подставляя (47.12) в (47.11), находим $C_3 = -C_2 = 1$, т. е.

$$G(T) = C\mathrm{e}^{T/\varkappa} + \theta(T)(1 - \mathrm{e}^{T/\varkappa}), \tag{47.13}$$

где C — произвольная постоянная, выбор которой приводит к важным физическим последствиям. В частности, если ограничиться запаздывающим решением, исчезающим при $T < 0$, то

$$G^{\text{зап}}(T) = \theta(T)(1 - e^{T/\varkappa}). \tag{47.14}$$

Физически $G^{\text{зап}}$ представляет собой скорость покоившейся при $T < 0$ частицы, на которую действует импульсная сила $\delta(T)$. Однако $G^{\text{зап}} = 1 - \mathrm{e}^{T/\varkappa}$ при $T > 0$, т. е. частица начинает самоускоряться в направлении, противоположном действию силы. Такое решение, очевидно, не поддается физической интерпретации. Поэтому выберем функцию Грина из условия ее ограниченности при $T > 0$. В таком случае необходимо выбрать $C = 1$, т. е.

$$G(T) = \theta(T) + [1 - \theta(T)]\,\mathrm{e}^{T/\varkappa}. \tag{47.15}$$

Решение уравнения движения (47.10), отвечающее такому выбору функции Грина, имеет вид

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}(t')G(t-t')\,\mathrm{d}t', \tag{47.16}$$

где $\mathbf{v}_0=\lim\limits_{t\to-\infty}\mathbf{v}(t)$, если считать, что $\mathbf{g}(t)$ достаточно быстро убывает при $t\to-\infty$ [в большинстве физических задач $\mathbf{g}(t)=0$ при $t<t_0$]. Подставляя (47.15) в (47.16), находим

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{g}(t')\,\mathrm{d}t'+\int\limits_{t}^{\infty}\mathbf{g}(t')\,\mathrm{e}^{(t-t')/\varkappa}\,\mathrm{d}t'. \tag{47.17}$$

Если первые слагаемые в (47.17) имеют обычный ньютоновский вид, то последнее слагаемое несколько необычно. Нетрудно видеть, что оно соответствует учету опережающих воздействий, появление которых связано с высшими производными в уравнении движения. Если бы при оценке мощности излучения P_{I} мы учитывали высшие мультипольные моменты (магнитный дипольный, электрический квадрупольный и т. д.), то эффект опережения был бы еще более сильным.

Появление опережающего воздействия можно было бы понять, если бы частица была протяженной. Так, например, заряженный шарик радиуса a испытывает воздействие электрического поля $\mathbf{E}(r)$ в тот момент, когда его центр находится на расстоянии a от точки $\mathbf{r}$. В данном же случае время опережения по порядку величины равно $\varkappa$, а эффективный размер $\varkappa c=2e^2/(3mc^2)$. Таким образом, излучающий точечный заряд ведет себя как протяженная частица, эффективная структура которой обусловлена полем излучения. Например, электрону, масса которого $m=9{,}1\cdot10^{-28}$ г, соответствует эффективный размер, получивший название *классического радиуса электрона* и равный

$$r_0\equiv e^2/(mc^2)=2{,}8\cdot10^{-13}\ \text{см}. \tag{47.18}$$

Задача 47.1. *Найти затухание скорости заряженной частицы в постоянном магнитном поле* $\mathbf{B}$, *считая силу реакции излучения малой.*

§ 48. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СВОБОДНЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ (ФОРМУЛА ТОМСОНА)

Рассмотрим произвольную неизлучающую систему зарядов и токов. Если эта система окажется в поле электромагнитной волны с заданной плотностью потока энергии $\mathbf{S}_0$, то под действием поля волны в системе возникнут изменяющиеся во времени мультипольные моменты, а это [см. (44.15)] приведет к тому, что система начнет излучать.

Очевидно, что мощность излучения $\mathrm{d}P_{\mathrm{I}}$ в некоторый телесный угол $\mathrm{d}\Omega$ пропорциональна $|\mathbf{S}_0|$. Поэтому одной из важных