Решение уравнения движения (47.10), отвечающее такому выбору функции Грина, имеет вид

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{g}(t')G(t-t')\,\mathrm{d}t', \tag{47.16}$$

где $\mathbf{v}_0=\lim\limits_{t\to-\infty}\mathbf{v}(t)$, если считать, что $\mathbf{g}(t)$ достаточно быстро убывает при $t\to-\infty$ [в большинстве физических задач $\mathbf{g}(t)=0$ при $t<t_0$]. Подставляя (47.15) в (47.16), находим

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int\limits_{-\infty}^{t}\mathbf{g}(t')\,\mathrm{d}t'+\int\limits_{t}^{\infty}\mathbf{g}(t')\,\mathrm{e}^{(t-t')/\varkappa}\,\mathrm{d}t'. \tag{47.17}$$

Если первые слагаемые в (47.17) имеют обычный ньютоновский вид, то последнее слагаемое несколько необычно. Нетрудно видеть, что оно соответствует учету опережающих воздействий, появление которых связано с высшими производными в уравнении движения. Если бы при оценке мощности излучения P_{I} мы учитывали высшие мультипольные моменты (магнитный дипольный, электрический квадрупольный и т. д.), то эффект опережения был бы еще более сильным.

Появление опережающего воздействия можно было бы понять, если бы частица была протяженной. Так, например, заряженный шарик радиуса a испытывает воздействие электрического поля $\mathbf{E}(r)$ в тот момент, когда его центр находится на расстоянии a от точки $\mathbf{r}$. В данном же случае время опережения по порядку величины равно $\varkappa$, а эффективный размер $\varkappa c=2e^2/(3mc^2)$. Таким образом, излучающий точечный заряд ведет себя как протяженная частица, эффективная структура которой обусловлена полем излучения. Например, электрону, масса которого $m=9{,}1\cdot10^{-28}$ г, соответствует эффективный размер, получивший название *классического радиуса электрона* и равный

$$r_0\equiv e^2/(mc^2)=2{,}8\cdot10^{-13}\ \text{см}. \tag{47.18}$$

Задача 47.1. *Найти затухание скорости заряженной частицы в постоянном магнитном поле* $\mathbf{B}$, *считая силу реакции излучения малой.*

§ 48. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СВОБОДНЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ (ФОРМУЛА ТОМСОНА)

Рассмотрим произвольную неизлучающую систему зарядов и токов. Если эта система окажется в поле электромагнитной волны с заданной плотностью потока энергии $\mathbf{S}_0$, то под действием поля волны в системе возникнут изменяющиеся во времени мультипольные моменты, а это [см. (44.15)] приведет к тому, что система начнет излучать.

Очевидно, что мощность излучения $\mathrm{d}P_{\mathrm{I}}$ в некоторый телесный угол $\mathrm{d}\Omega$ пропорциональна $|\mathbf{S}_0|$. Поэтому одной из важных характеристик такой системы зарядов и токов должно быть отношение

$$d\sigma = dP_I \mp |\mathbf{S}_0|, \qquad (48.1)$$

имеющее размерность площади и называемое *дифференциальным сечением рассеяния системы*. Если воспользоваться квантовыми представлениями об электромагнитном поле, т. е. ввести кванты света — *фотоны*, то $d\sigma$ будет численно равно площади, на которую падают фотоны, рассеянные в телесный угол $d\Omega$ (рис. 48.1).

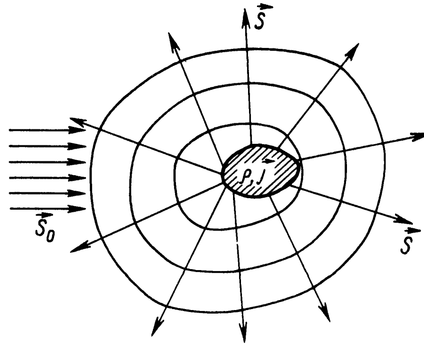

Рис. 48.1

Интегрируя (48.1) по всем направлениям, получаем *полное сечение рассеяния*

$$\sigma = \oint \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{P_I}{|\mathbf{S}_0|}. \qquad (48.2)$$

В качестве примера рассмотрим рассеяние электромагнитных волн свободным электроном. Уравнение его движения в поле волны [см. (47.9)] можно записать в виде

$$m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]/c) + 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \qquad (48.3)$$

Считая движение электрона достаточно медленным, т. е. полагая $\mathbf{v} \ll c$, и учитывая, что для плоской электромагнитной волны $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, можно пренебречь $[\mathbf{vB}]/c$ по сравнению с $\mathbf{E}$ и переписать (48.3) так:

$$m\dot{\mathbf{v}} \approx e\mathbf{E} + 2e^2\ddot{\mathbf{v}}/(3c^3). \qquad (48.4)$$

Полагая в (48.4) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \exp(-i\omega t)$, т. е. рассматривая только вынужденное движение электрона, и пренебрегая зависимостью $\mathbf{E}$ от $\mathbf{r}$, находим

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\left(1 + i\frac{2e^2\omega}{3mc^3}\right)^{-1} \mathbf{E}. \qquad (48.5)$$

Так как для плоской падающей волны $|\mathbf{S}_0| = c|\mathbf{E}|^2/(4\pi)$, а мощность излучения в телесный угол $d\Omega$ [см. (46.24)] равна

$$dP_I = \frac{e^2}{4\pi c^3} |[\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}]|^2 d\Omega, \qquad (48.6)$$

то с помощью (48.5) нетрудно найти дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma = \frac{e^4 d\Omega}{c^4 m^2 |1 + i2\omega r_0/(3c)|^2} \frac{|[\mathbf{nE}]|^2}{|\mathbf{E}|^2} = \frac{r_0^2 \sin^2 \vartheta d\Omega}{1 + [2\omega r_0/(3c)]^2}, \qquad (48.7)$$

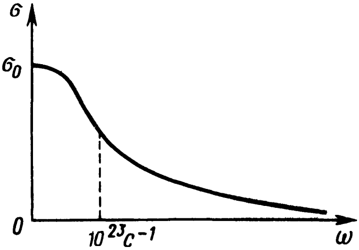

Рис. 48.2

где ϑ — угол между направлениями излучения $\mathbf{n}$ и вектором поляризации $\mathbf{e}=\mathbf{E}_0/E_0$ падающей волны, r_0 — классический радиус электрона.

Теперь уже нетрудно подсчитать и полное сечение рассеяния:

$$\sigma(\omega)=\frac{\sigma_0}{1+[2\omega r_0/(3c)]^2},\quad \sigma_0\equiv\frac{8\pi}{3}r_0^2; \qquad (48.8)$$

зависимость его от частоты представлена на рис. 48.2. В предельном случае низких частот, когда $\omega r_0 \ll c$, находим

$$\lim_{\omega\to 0}\sigma(\omega)=\sigma_0=8\pi r_0^2/3. \qquad (48.9)$$

Эта формула впервые была получена *Дж. Дж. Томсоном* и названа его именем. Из нее следует, что полное сечение рассеяния электромагнитных волн свободным электроном имеет порядок площади круга радиуса r_0. Поэтому $r_0=e^2/(mc^2)$ можно вполне обоснованно рассматривать как характерный размер электрона, его классический радиус.

Задача 48.1. *Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния эллиптически поляризованных плоских электромагнитных волн свободным электроном.*

Задача 48.2. *Найти выражение для полного сечения рассеяния линейно поляризованного света частоты ω упруго связанным электроном с трением. Объяснить с его помощью голубой цвет неба и красный цвет Солнца при закате.*