4

ГЛАВА

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ И ПОЛЯ

При решении многих электродинамических задач весьма полезным оказывается приближение квазистационарного поля. *Его применяют при анализе линейных цепей переменного тока, при расчете длинных линий, в магнитной гидродинамике и в других областях. Чаще всего это приближение эффективно в тех случаях, когда характерные частоты изменения токов и полей не очень велики и поэтому длины волн, которые могут излучаться системой, значительно превосходят ее линейные размеры l. Иначе говоря, если ввести характерное время T изменения полей, то предполагается выполнение условия*

$$l \ll cT,$$

которое можно назвать достаточным условием квазистационарности. *Электромагнитное поле в этом случае напоминает по структуре поле вибратора Герца в ближней зоне и получило название квазистационарного. Уравнения для полей в квазистационарном приближении оказываются более простыми, что позволяет эффективно использовать их для решения широкого круга задач.*

§ 49. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Квазистационарное приближение, основанное на условии (IV.1), соответствует предположению о *медленности* процессов. Это означает, что всякое изменение поля в какой-либо части системы практически мгновенно передается в любую ее точку, т. е. фаза изменения поля во всех точках системы практически одна и та же. Иными словами, при анализе процессов в системе можно пренебречь запаздыванием, заменив, например, в выражении для запаздывающих потенциалов (41.24) аргумент $t-R/c$ на t. В результате потенциалы φ и $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$\varphi(t, \mathbf{r})=\int \frac{\rho(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V'; \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{r})=\frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V', \tag{49.1}$$

откуда следует, что они являются решениями уравнений

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho, \quad \Delta\mathbf{A}=-4\pi\mathbf{j}/c,$$

не отличающихся от стационарных. Особенность этих уравнений состоит в том, что время t все же входит в них параметрически —

через источники ρ и $\mathbf{j}$. Поэтому при вычислении $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ воспользуемся обычным определением

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{49.2}$$

учитывающим вихревой характер электрического поля.

Таким образом, уравнения для полей в квазистационарном приближении действительно упрощаются. Для получения этих упрощенных уравнений в случае неоднородной среды с проницаемостями $\varepsilon(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$, а также при наличии проводников с удельной проводимостью $\sigma(\mathbf{r})$ воспользуемся методом электромагнитных потенциалов в специальной калибровке

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{A}) = 0. \tag{49.3}$$

Тогда уравнения Максвелла принимают следующий вид:

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = -4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right). \tag{49.4}$$

Если в области с линейным размером l рассматривать решения этих уравнений, существенно изменяющиеся за некоторое время T, то при выполнении условия (IV.1) в среднем по области

$$\left|\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)\right| \gg \left|\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right|. \tag{49.5}$$

В самом деле, в среднем по области $|\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{A})|$ имеет порядок $A/(l^2\mu)$, тогда как порядок $|\varepsilon c^{-2}\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2|$ есть $\varepsilon A/(c^2T^2)$. Поэтому (49.5) является следствием (IV.1). С учетом (49.5) уравнения Максвелла для квазистационарных процессов можно записать в виде

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{\varepsilon}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = -4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \end{gathered} \tag{49.6}$$

Они отличаются от полных уравнений Максвелла (10.1) тем, что в первой группе уравнений сделано пренебрежение вихревой частью $\mathbf{E}$ по сравнению с потенциальной частью, что можно выразить неравенством

$$|\nabla\varphi| \gg \frac{1}{c}\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|. \tag{49.7}$$

Это неравенство можно считать *определяющим условием квазистационарности* вместо (IV.1). Такое предпочтение оправдано тем, что, например, для длинных линий условие (IV.1) нарушено, тогда как уравнения (49.6) справедливы, так как выполнено неравенство (49.7).

Наконец, для хороших проводников уравнения (49.6) могут быть подвергнуты дальнейшему упрощению, если предположить выполнимость неравенства

$$\sigma T \gg \varepsilon. \tag{49.8}$$

Согласно закону Ома, $\mathbf{j}=\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{стор}})$, и (49.8) сводится к предположению о малости плотности тока смещения по сравнению с плотностью тока проводимости:

$$\frac{1}{4\pi}\left|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right| \ll |\mathbf{j}|. \tag{49.9}$$

С учетом (49.9) уравнения (49.6) принимают такой вид:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\right)=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E})=4\pi\rho, \\ \operatorname{\mathbf{rot}}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0.\end{gathered} \tag{49.10}$$

Как видно, индукция **B** подчиняется уравнениям магнитостатики, что позволяет использовать все результаты этого раздела. Вместе с тем необходимо учитывать, что электрическое поле **E** не является безвихревым.

§ 50. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКАХ

Из общих уравнений Максвелла для квазистационарных процессов нетрудно получить основные уравнения для токов в системе квазилинейных проводников, обычно используемые при расчете линейных цепей, содержащих такие элементы, как резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Однако проще всего эти расчетные уравнения вывести из *закона сохранения электрического заряда и закона электромагнитной индукции Фарадея*. Но если в (10.4) закон Фарадея был сформулирован в виде

$$\oint_l (\mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l})=-\frac{1}{c}\int_S\left(\mathbf{n}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}S=-\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{50.1}$$

где Φ — магнитный поток сквозь неподвижный контур l, то наиболее общая его формулировка (1.17) предполагает произвольно деформирующийся проводящий контур (см., однако, задачу **1.9**). При этом э. д. с. в контуре оказывается равной

$$\mathscr{E}=-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{50.2}$$