

Наконец, для хороших проводников уравнения (49.6) могут быть подвергнуты дальнейшему упрощению, если предположить выполнимость неравенства

$$\sigma T \gg \varepsilon. \quad (49.8)$$

Согласно закону Ома, $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}})$, и (49.8) сводится к предположению о малости плотности тока смещения по сравнению с плотностью тока проводимости:

$$\frac{1}{4\pi} \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \ll |\mathbf{j}|. \quad (49.9)$$

С учетом (49.9) уравнения (49.6) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi \rho, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (49.10)$$

Как видно, индукция \mathbf{B} подчиняется уравнениям магнитостатики, что позволяет использовать все результаты этого раздела. Вместе с тем необходимо учитывать, что электрическое поле \mathbf{E} не является безвихревым.

§ 50. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКАХ

Из общих уравнений Максвелла для квазистационарных процессов нетрудно получить основные уравнения для токов в системе квазилинейных проводников, обычно используемые при расчете линейных цепей, содержащих такие элементы, как резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Однако проще всего эти расчетные уравнения вывести из закона сохранения электрического заряда и закона электромагнитной индукции Фарадея. Но если в (10.4) закон Фарадея был сформулирован в виде

$$\oint_l (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c} \int_s \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dS = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (50.1)$$

где Φ — магнитный поток сквозь неподвижный контур l , то наиболее общая его формулировка (1.17) предполагает произвольно деформирующийся проводящий контур (см., однако, задачу 1.9). При этом э. д. с. в контуре оказывается равной

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (50.2)$$

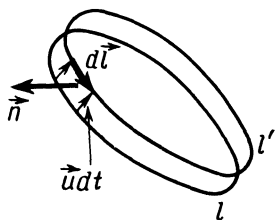


Рис. 50.1

то вызванное движением контура изменение магнитного потока равно

$$\delta\Phi = -dt \oint_l (\mathbf{B} [d\mathbf{l} \mathbf{u}]). \quad (50.2)$$

В результате полная скорость изменения магнитного потока

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \oint_l ([\mathbf{u}\mathbf{B}] dl). \quad (50.4)$$

С учетом (50.1) соотношение (50.4) можно переписать в виде

$$\oint_l (\mathbf{E}' dl) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (50.5)$$

где

$$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}\mathbf{B}] \quad (50.6)$$

— эффективная, или действующая, напряженность электрического поля в движущемся контуре. Очевидно, что если

$$\mathcal{E} \equiv \oint_l (\mathbf{E}' dl), \quad (50.7)$$

то (50.5) эквивалентно (50.2). Легко понять, что в движущемся проводнике истинная э. д. с. описывается именно формулой (50.7), поскольку на заряды, создающие ток в движущемся проводе, действует полная сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}\mathbf{B}] \right) = e\mathbf{E}'.$$

Задача 50.1. Найти э. д. с. \$\mathcal{E}\$ униполярной машины, представляющей собой постоянный сферический магнит радиуса \$a\$, вращающийся с угловой скоростью \$\omega\$. Один из подвижных контактов расположен на полюсе, а другой — на экваторе (рис. 50.2).

Итак, будем исходить из уравнения (50.5), которое применим для описания токов в некоторой системе квазилинейных провод-

ников (включающих различные омические нагрузки, катушки самоиндукции, трансформаторы, цепи электродвигателей и тому подобное), которые могут содержать и разрывы в виде конденсаторов.

Заметим, что внутри движущегося проводника, согласно закону Ома, $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E}' + \mathbf{E}^{\text{стоп}})$, или

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{E}^{\text{стоп}} + \mathbf{j} / \sigma, \quad (50.8)$$

а внутри конденсатора, по условию (49.7),

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi. \quad (50.9)$$

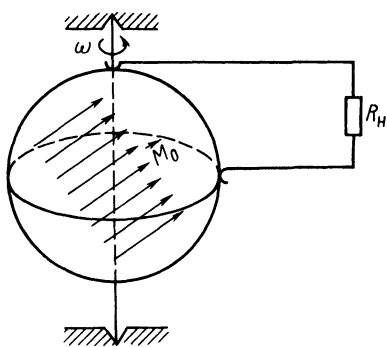


Рис. 50.2

Используем (50.8) и (50.9) для вычисления контурного интеграла в (50.5). При этом для проводящего участка контура Δl с сопротивлением R

$$\int_{\Delta l} (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}) = - \int_{\Delta l} (\mathbf{E}^{\text{стоп}} \cdot d\mathbf{l}) + \int_{\Delta l} \frac{(\mathbf{j} \cdot d\mathbf{l})}{\sigma} = -\mathcal{E}^{\text{стоп}} + IR. \quad (50.10)$$

В то же время для участка с конденсатором емкостью C (рис. 50.3)

$$\int_1^2 (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}) = - \int_1^2 (\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l}) = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{e(t)}{C}, \quad (50.11)$$

где $e(t)$ — заряд конденсатора. Зная силу тока, проходящего через конденсатор, и принимая для простоты $e(0) = 0$, имеем

$$e(t) = - \int_0^t I(t) dt.$$

С учетом соотношений (50.10) и (50.11) для некоторого замкнутого контура l_s

$$\oint_{l_s} (\mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}) = \sum_{i \in l_s} \left(-\mathcal{E}_i^{\text{стоп}} + I_i R_i + \frac{1}{C_i} \int_0^t I_i dt \right), \quad (50.12)$$

где сумма распространяется на все элементы контура. Вводя взаимную индуктивность L_{ik} двух элементов, по которым протекают токи I_i и I_k , для магнитного потока Φ_s , связанного с контуром l_s и входящего [см. (50.5)] в левую часть (50.12), получаем

$$\Phi_s = \frac{1}{c} \sum_{i \in l_s} \sum_k L_{ik} I_k. \quad (50.13)$$

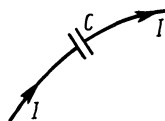


Рис. 50.3

В результате (50.12) принимает вид

$$\sum_{i \in I_s} \left(\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \sum_k L_{ik} I_k + I_i R_i + \frac{1}{C_i} \int_0^t I_i dt \right) = \sum_{i \in I_s} \mathcal{E}_i^{\text{стоп}}. \quad (50.14)$$

Мы получили *второй закон Кирхгофа* для линейной цепи переменного тока: *сумма сторонних э. д. с., взятая по некоторому замкнутому контуру, равна сумме падений напряжений на всех индуктивных, емкостных и омических элементах этого контура.*

Наконец, для разветвленных цепей уравнения (50.14) следует дополнить первым законом Кирхгофа. Для его получения воспользуемся соотношением

$$\text{div} \left(\mathbf{j} - \frac{\varepsilon}{4\pi} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0, \quad (50.15)$$

являющимся очевидным следствием (49.6) и выражающим закон сохранения электрического заряда в квазистационарном приближении. Интегрируя (50.15) по некоторому объему, включающему точку разветвления цепи, и используя теорему Гаусса—Остроградского, находим

$$\oint_S (\mathbf{n} \mathbf{j}) dS - \oint_S \frac{\varepsilon}{4\pi} (\mathbf{n} \nabla) \frac{\partial \varphi}{\partial t} dS = 0,$$

или

$$\sum_k I_k = 0, \quad (50.16)$$

где сумма берется по всем ответвлениям, сходящимся в данной точке, а под токами I_k понимаются как токи проводимости, так и квазистационарные токи смещения. Соотношение (50.16) и представляет собой *первый закон Кирхгофа: сумма сил токов, притекающих к точке разветвления цепи, равна нулю.*

Итак, для расчета линейных цепей с квазистационарными токами достаточно составить и решить систему уравнений Кирхгофа (50.14) и (50.16). В наиболее распространенном случае, когда токи и э. д. с. зависят от времени гармонически:

$$I_k = I_k^0 e^{-i\omega t}, \quad \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} = \mathcal{E}_k^0 e^{-i\omega t},$$

а C_i и L_{ik} не зависят от времени, второй закон Кирхгофа принимает вид

$$\sum_{j \in I_s} \sum_k Z_{jk} I_k^0 = \sum_{j \in I_s} \mathcal{E}_j^0, \quad (50.17)$$

где введена *матрица комплексного сопротивления (импеданс)*

$$Z_{jk} \equiv R_j \delta_{jk} + i [\delta_{jk} (\omega C_j)^{-1} - \omega L_{jk} / c^2], \quad (50.18)$$

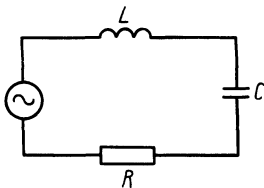


Рис. 50.4

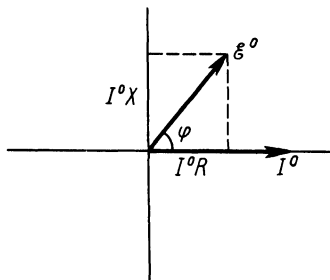


Рис. 50.5

действительная часть которой содержит *активные сопротивления* R_{jk} , а мнимая — *реактивные сопротивления* $X_{jk} = \delta_{jk} (\omega C_j)^{-1} - \omega L_{jk} c^{-2}$.

В качестве примера рассмотрим простую цепь, состоящую из последовательно включенных индуктивности L , емкости C и сопротивления R (рис. 50.4). В этом случае

$$E^0 = I^0 Z, \quad (50.19)$$

где

$$Z = R + iX, \quad X = (\omega C)^{-1} - \omega L / c^2. \quad (50.20)$$

Очевидно, что между током и э. д. с. появляется сдвиг фаз φ :

$$I^0 = \frac{E^0}{|Z|} e^{-i\varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{1}{\omega CR} - \frac{\omega L}{Rc^2}, \quad (50.21)$$

что принято изображать на диаграмме ток — напряжение (рис. 50.5). Если подсчитать выделяющуюся в цепи тепловую мощность, то найдем

$$R\tilde{I}^2 = R |I^0|^2 / 2 = \cos \varphi |E^0 I^0| / 2. \quad (50.22)$$

В связи с этим сдвиг фаз φ [см. (50.21)] часто называют *углом потерь*. Будучи весьма важной характеристикой линейной цепи, позволяющей определить в ней тепловые потери, $\cos \varphi$ обычно всегда указывается в паспортах различных технических устройств, например электродвигателей переменного тока.

Замечая, что импеданс Z системы является функцией частоты ω приложенной э. д. с., нетрудно определить ту частоту ω_0 , при которой сила тока в цепи максимальна, т. е. наступает *резонанс*. Согласно (50.21), при этой частоте $|Z|$ минимально, откуда $\operatorname{Im} Z = 0$, т. е.

$$\omega_0 = c(LC)^{-1/2} \quad (50.23)$$

(*формула Томсона**). Нетрудно видеть, что при резонансной частоте $\varphi = 0$, т. е. потери в цепи максимальны — контур отбирает от источника максимальную энергию.

* Речь идет о В. Томсоне (Кельвине).

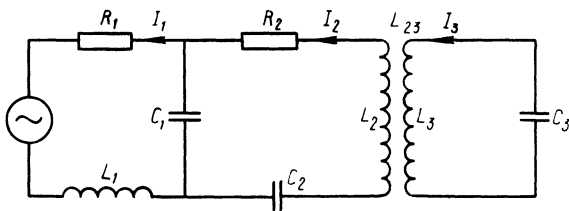


Рис. 50.6

Часто в реальных конденсаторах и катушках индуктивности также наблюдаются потери, что связано с проводимостью используемых материалов. Эти потери удобно описывать с помощью формализма комплексных проницаемостей* $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, $\mu = \mu' + i\mu''$. Полагая $C = \varepsilon C_0$ и $L = \mu L_0$, импедансы конденсатора и катушки индуктивности можно представить в следующей форме:

$$Z_C = \frac{i\varepsilon' + \varepsilon''}{\omega C_0 |\varepsilon|^2}, \quad Z_L = -i\omega L_0 (\mu' + i\mu'') / c^2. \quad (50.24)$$

Тогда соответствующие углы потерь имеют вид

$$\varphi_C = \arctg(\varepsilon'' / \varepsilon'), \quad \varphi_L = -\arctg(\mu'' / \mu'). \quad (50.25)$$

Задача 50.2. Записать уравнения Кирхгофа для линейной цепи, изображенной на рис. 50.6.

§ 51. ПРЕВРАЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ЦЕПИ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Из уравнений Максвелла в квазистационарном приближении нетрудно получить теорему Пойнтинга, которая выглядит так же, как и в общем случае:

$$(\mathbf{jE}) = -\partial w / \partial t - \text{div } \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = c [\mathbf{EH}] / (4\pi), \quad (51.1)$$

но с тем отличием, что выражение для плотности энергии электромагнитного поля равно

$$w = w_e + w_m = \varepsilon (\nabla\varphi)^2 / (8\pi) + \mu H^2 / (8\pi), \quad (51.2)$$

т. е. оставляется лишь потенциальная часть электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В связи с этим w_e отлична от нуля практически только в конденсаторах, т. е. полная электрическая энергия равна

$$W_e = \int w_e dV = \frac{1}{2} \sum_k \frac{e_k^2}{C_k}, \quad (51.3)$$

* Формализм комплексных проницаемостей применяется при описании распространения электромагнитных волн в поглощающих средах (см., в частности, задачу 40.2).