

Рис. 50.6

Часто в реальных конденсаторах и катушках индуктивности также наблюдаются потери, что связано с проводимостью используемых материалов. Эти потери удобно описывать с помощью формализма комплексных проницаемостей\*  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ ,  $\mu = \mu' + i\mu''$ . Полагая  $C = \varepsilon C_0$  и  $L = \mu L_0$ , импедансы конденсатора и катушки индуктивности можно представить в следующей форме:

$$Z_C = \frac{i\varepsilon' + \varepsilon''}{\omega C_0 |\varepsilon|^2}, \quad Z_L = -i\omega L_0 (\mu' + i\mu'') / c^2. \quad (50.24)$$

Тогда соответствующие углы потерь имеют вид

$$\varphi_C = \arctg(\varepsilon'' / \varepsilon'), \quad \varphi_L = -\arctg(\mu'' / \mu'). \quad (50.25)$$

**Задача 50.2.** Записать уравнения Кирхгофа для линейной цепи, изображенной на рис. 50.6.

### § 51. ПРЕВРАЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ЦЕПИ ЛИНЕЙНЫХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ТОКОВ. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Из уравнений Максвелла в квазистационарном приближении нетрудно получить теорему Пойнтинга, которая выглядит так же, как и в общем случае:

$$(\mathbf{jE}) = -\partial w / \partial t - \text{div } \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = c [\mathbf{EH}] / (4\pi), \quad (51.1)$$

но с тем отличием, что выражение для плотности энергии электромагнитного поля равно

$$w = w_e + w_m = \varepsilon (\nabla\varphi)^2 / (8\pi) + \mu H^2 / (8\pi), \quad (51.2)$$

т. е. оставляется лишь потенциальная часть электрического поля  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . В связи с этим  $w_e$  отлична от нуля практически только в конденсаторах, т. е. полная электрическая энергия равна

$$W_e = \int w_e dV = \frac{1}{2} \sum_k \frac{e_k^2}{C_k}, \quad (51.3)$$

\* Формализм комплексных проницаемостей применяется при описании распространения электромагнитных волн в поглощающих средах (см., в частности, задачу 40.2).

в то время как магнитная энергия  $W_m$  имеет обычный вид, как и для системы постоянных токов:

$$W_m = \int w_m dV = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k. \quad (51.4)$$

Запишем теперь интегральную теорему Пойнтинга:

$$\int (\mathbf{jE}) dV = -\frac{d}{dt}(W_e + W_m) - \oint_{S \rightarrow \infty} (\mathbf{nS}) dS. \quad (51.5)$$

Поверхностный интеграл в (51.5), описывающий потери системы на излучение, в квазистационарном приближении исчезает, так как [см. (49.6)] на поверхности  $S$ , которую будем считать сферой бесконечно большого радиуса  $R$ , имеем:

$$E \sim R^{-2}, \quad H \sim R^{-2}, \quad |\mathbf{S}| \sim R^{-4}.$$

Наконец, преобразуем интеграл в левой части (51.5). Полагая в соответствии с законом Ома

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u} + \sigma (\mathbf{E} + [\mathbf{uB}]/c + \mathbf{E}^{\text{стоп}}),$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость движения проводников или обкладок конденсаторов, находим

$$\int (\mathbf{jE}) dV = \int [j'^2/\sigma - (\mathbf{j}'\mathbf{E}^{\text{стоп}}) + (\mathbf{uf})] dV. \quad (51.6)$$

Здесь  $\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \rho \mathbf{u}$  — плотность тока в неподвижных проводниках,  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{jB}]$  — плотность силы Лоренца. Так как для линейных токов  $\mathbf{j}' dV = I d\mathbf{l}$ , то

$$\int [j'^2/\sigma - (\mathbf{j}'\mathbf{E}^{\text{стоп}})] dV = \sum_k (I_k^2 R_k - I_k \mathcal{E}_k^{\text{стоп}}).$$

Наконец, последний член в (51.6) представляет собой мощность силы Лоренца и в соответствии с теоремой живых сил может быть приведен к виду  $\int (\mathbf{uf}) dV = dT/dt$ , где  $T$  — кинетическая энергия системы. В результате уравнение (51.6) можно преобразовать:

$$\int (\mathbf{jE}) dV = \sum_k (I_k^2 R_k - I_k \mathcal{E}_k^{\text{стоп}}) + dT/dt. \quad (51.6a)$$

Подстановка (51.6a) в (51.5) позволяет записать закон сохранения энергии в системе квазистационарных токов в виде

$$\frac{d}{dt} \left( T + \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k + \frac{1}{2} \sum_k \frac{e_k^2}{C_k} \right) = \sum_k (I_k \mathcal{E}_k^{\text{стоп}} - I_k^2 R_k). \quad (51.7)$$

Структура этого уравнения говорит о существовании далеко идущей аналогии между системой квазистационарных токов

и механической системой с диссипацией. В самом деле, если заряды  $e_i$  рассматривать как обобщенные координаты, то силы токов  $I_i = -e_i$  должны играть роль обобщенных скоростей. При этом уравнения Кирхгофа (50.14) и (50.16) можно записать в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial I_i} \right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial e_i} = - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial I_i}, \quad (51.8)$$

в которых функция Лагранжа и диссипативная функция Рэлея имеют соответственно такой вид:

$$\Lambda = W_m - W_e = \frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k - \frac{1}{2} \sum_i \frac{e_i^2}{C_i}; \quad (51.9)$$

$$\mathcal{D} = \sum_i \left( \frac{1}{2} I_i^2 R_i - I_i \mathcal{E}_i^{\text{эстоп}} \right). \quad (51.10)$$

Итак, энергия  $W_m$  магнитного поля играет роль кинетической, а энергия  $W_e$  электрического поля — роль потенциальной энергии, что полностью согласуется с выражениями для обобщенных сил (23.15) и (33.8).

Отмеченное обстоятельство позволяет легко вычислять механические силы взаимодействия токов и зарядов, обычно называемые *пондеромоторными силами*. Так, если коэффициенты  $C_i$  или  $L_{ik}$ , входящие в  $\Lambda$ , явно зависят от некоторых геометрических параметров  $q_s$  (обычно размеров или расстояний), которые могут изменяться со временем, то соответствующие им обобщенные силы находят по правилу

$$F_s = \frac{\partial \Lambda}{\partial q_s} = \sum_{i,k} \frac{1}{2c^2} I_i I_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial q_s} - \sum_i \frac{e_i^2}{2} \frac{\partial}{\partial q_s} \left( \frac{1}{C_i} \right). \quad (51.11)$$

Если к лагранжиану  $\Lambda$  добавить соответствующую механическую часть, зависящую от  $q_s$  и  $\dot{q}_s$ , то нетрудно получить и уравнения движения для параметров  $q_s$  с учетом пондеромоторных сил (51.11), действующих на элементы системы со стороны электромагнитного поля.

В качестве примера возьмем катушку самоиндукции длины  $l$ , поперечного сечения  $\pi r^2$ , с обмоткой из  $N$  витков провода. Тогда сила, действующая на катушку в направлении  $l$ , равна

$$F_l = \frac{I^2}{2c^2} \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{4\pi^2 N^2 r^2}{l} \right) = - \frac{I^2 2\pi^2 N^2 r^2}{c^2 l^2} < 0, \quad (51.12)$$

т. е. соленоид стремится сократиться, что качественно объясняется притяжением двух соседних витков с током. В то же время сила, действующая вдоль  $r$ , равна

$$F_r = \frac{I^2}{2c^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{4\pi^2 N^2 r^2}{l} \right) = \frac{I^2 4\pi^2 N^2 r}{c^2 l} > 0, \quad (51.13)$$

т. е. соленоид стремится растянуться, что качественно объясняется отталкиванием тех элементов витков, токи в которых противоположны. Так, в известных опытах *П. Л. Капицы* по созданию сверхсильных магнитных полей сила тока достигала миллионов ампер и часто катушки разрывались, не выдерживая нагрузок.

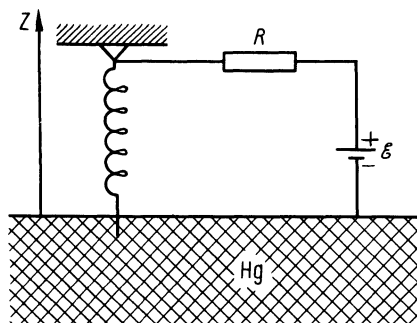


Рис. 51.1

**Задача 51.1.** Катушка индуктивности массы  $m$ , подвешенная за один конец, подключенный к источнику постоянного напряжения с э. д. с.  $\mathcal{E}$  (рис. 51.1), свободным концом опущена в ртуть. Найти закон движения свободного конца катушки и закон изменения силы тока в ней.

**Задача 51.2.** Рельсотрон представляет собой две параллельные металлические шины длины  $s$ , уложенные на расстоянии  $l$  одна от другой и находящиеся под напряжением  $U$  в поперечном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Подвижный стержень длины  $l$  и массы  $m$  замыкает шины на левом конце. Найти предельные значения скорости  $u_0$  разгона стержня и к. п. д.  $\eta_0$  рельсотрона, считая заданными сопротивление цепи  $R$ , индуктивность  $L$  и коэффициент трения  $k$ .

## § 52. СКИН-ЭФФЕКТ

Рассматривая в § 36 задачу о поле прямого провода с постоянным током, мы обнаружили, что ток равномерно распределен по сечению провода. Но оказывается, что для переменного тока это уже не так. В самом деле, магнитный поток сквозь контур в продольном сечении провода (рис. 52.1) в случае переменного тока изменяется со временем, а это означает, что циркуляция напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля по этому контуру отлична от нуля. Отсюда следует, что напряженность  $\mathbf{E}$  поля изменяется в радиальном направлении, поэтому распределение плотности тока  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  также оказывается неравномерным по сечению провода. Расчеты показывают, что практически ток протекает в тонком поверхностном слое провода, откуда и происходит название этого явления — *скин-эффект*\*.

Для высокопроводящих материалов толщина скин-слоя оказывается очень малой. Если она мала по сравнению с радиусом провода, то расчеты, выполненные для цилиндрического провода, незначительно отличаются от расчетов скин-эффекта в проводящем полупространстве. Рассмотрим поэтому именно эту задачу.

\* Это явление было описано английским физиком *О. Хевисайдом* в работах 1884—1885 гг. и впервые обнаружено на опыте его соотечественником *Д. Юзом* в 1886 г.