

т. е. соленоид стремится растянуться, что качественно объясняется отталкиванием тех элементов витков, токи в которых противоположны. Так, в известных опытах *П. Л. Капицы* по созданию сверхсильных магнитных полей сила тока достигала миллионов ампер и часто катушки разрывались, не выдерживая нагрузок.

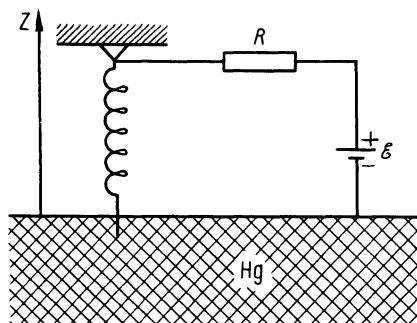


Рис. 51.1

Задача 51.1. Катушка индуктивности массы m , подвешенная за один конец, подключенный к источнику постоянного напряжения с э. д. с. \mathcal{E} (рис. 51.1), свободным концом опущена в ртуть. Найти закон движения свободного конца катушки и закон изменения силы тока в ней.

Задача 51.2. Рельсотрон представляет собой две параллельные металлические шины длины s , уложенные на расстоянии l одна от другой и находящиеся под напряжением U в поперечном магнитном поле \mathbf{B} . Подвижный стержень длины l и массы m замыкает шины на левом конце. Найти предельные значения скорости u_0 разгона стержня и к. п. д. η_0 рельсотрона, считая заданными сопротивление цепи R , индуктивность L и коэффициент трения k .

§ 52. СКИН-ЭФФЕКТ

Рассматривая в § 36 задачу о поле прямого провода с постоянным током, мы обнаружили, что ток равномерно распределен по сечению провода. Но оказывается, что для переменного тока это уже не так. В самом деле, магнитный поток сквозь контур в продольном сечении провода (рис. 52.1) в случае переменного тока изменяется со временем, а это означает, что циркуляция напряженности \mathbf{E} электрического поля по этому контуру отлична от нуля. Отсюда следует, что напряженность \mathbf{E} поля изменяется в радиальном направлении, поэтому распределение плотности тока $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ также оказывается неравномерным по сечению провода. Расчеты показывают, что практически ток протекает в тонком поверхностном слое провода, откуда и происходит название этого явления — *скин-эффект**.

Для высокопроводящих материалов толщина скин-слоя оказывается очень малой. Если она мала по сравнению с радиусом провода, то расчеты, выполненные для цилиндрического провода, незначительно отличаются от расчетов скин-эффекта в проводящем полупространстве. Рассмотрим поэтому именно эту задачу.

* Это явление было описано английским физиком *О. Хевисайдом* в работах 1884—1885 гг. и впервые обнаружено на опыте его соотечественником *Д. Юзом* в 1886 г.

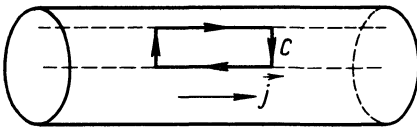


Рис. 52.1

Пусть однородная проводящая среда занимает полупространство $z > 0$, обладает электропроводимостью σ , проницаемостями ϵ , μ и граничит с вакуумом (рис. 52.2). Запишем уравнения Максвелла в квазистационарном

приближении внутри проводника:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad (\text{а}) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (\text{б}) \quad (52.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (\text{в}) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (\text{г})$$

Здесь $\rho = 0$, так как рассматривается установившийся процесс и все внесенные свободные заряды [(см. (37.12)] должны рассосаться за время релаксации $\tau = \epsilon / (4\pi\sigma)$.

Дифференцируя по t уравнение (52.1а), находим

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{c}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{c}{\mu} \Delta \mathbf{E},$$

откуда

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (52.2)$$

Аналогичное уравнение получается и для напряженности магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (52.3)$$

Задача 52.1. Показать, что уравнения (52.2) и (52.3) допускают в области V при граничном условии $[\mathbf{nE}] = 0$ или $[\mathbf{nH}] = 0$ только затухающие во времени решения.

На основании результата задачи 52.1 можно сделать вывод, что квазистационарное поле в области $z > 0$ может существовать долгое время только при условии, что на границе области $z = 0$ поддерживается некоторое внешнее поле (в случае задачи о проводнике это соответствует заданию внешнего напряжения, приложенного к проводу). В частности, если на границе задано периодическое электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$, направленной по оси X , то решение задачи следует искать в виде

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0); \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = (j, 0, 0).$$

Тогда из $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ выводим, что $\partial E / \partial x = 0$, т. е. E зависит только от t , y и z . Но так как нас интересует задача о распределении плотности тока в цилиндрическом проводнике, которую мы упростили, то зависимость от y можно не рассматривать, имея в виду лишь азимутально-симметричные реше-

ния. Поэтому полагаем $E = E(z) \exp(-i\omega t)$ и запишем (52.2) в виде

$$E''(z) = -i4\pi\sigma\mu\omega c^{-2}E(z). \quad (52.4)$$

Решение уравнения (52.4) очевидно:

$$E(z) = E_0 e^{\kappa z}, \quad \kappa = \pm ic^{-1} \sqrt{i4\pi\sigma\mu\omega}.$$

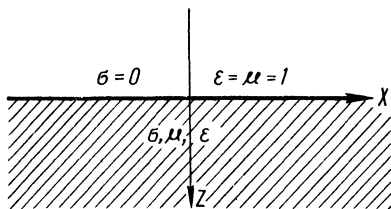


Рис. 52.2

Отбрасывая нарастающее в глубь проводника поле как физически неосуществимое, выбираем решение с $\text{Re} \kappa < 0$, т. е.

$$\kappa = (i-1)/\delta, \quad \delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}. \quad (52.5)$$

Таким образом, напряженность электрического поля в проводнике изменяется по закону

$$E(t, z) = E_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}. \quad (52.6)$$

Как видно, она экспоненциально затухает в глубь проводника. При этом роль эффективной глубины проникновения поля в проводник играет параметр δ , называемый *толщиной скин-слоя* и определяемый формулой (52.5). Числовые оценки, выполненные для меди ($\mu = 1$, $\sigma = 5 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$) при частоте 50 Гц, показывают, что $\delta \approx 2 \text{ см}$. Поэтому в проводниках обычных сечений скин-эффект проявляется лишь при гораздо большей частоте.

Для нахождения напряженности магнитного поля в проводнике воспользуемся уравнением (52.1в), из которого получим

$$\mathbf{H} = -i \frac{c}{\mu\omega} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (52.7)$$

Подставляя (52.6) в (52.7), находим:

$$\mathbf{H} = (0, H, 0); \quad H = Ec(1+i)/(\mu\omega\delta). \quad (52.8)$$

Используем это решение для расчета сопротивления 1 см цилиндрического провода радиусом a . Если $a \ll \delta$, то очевидно, что результат будет такой же, как при постоянной силе тока, так как плотность тока почти постоянна по сечению провода. Если же $a \gg \delta$, то результат будет иным и получить его можно с помощью (52.6), положив

$$E(t, r) \approx E_0 \exp[(a-r)(i-1)/\delta] \exp(-i\omega t). \quad (52.9)$$

Прежде всего вычислим на основе (52.9) полную силу тока через сечение провода:

$$I = 2\pi\sigma \int_0^a E r dr \approx (1+i)\pi a\sigma\delta E_0 e^{-i\omega t}. \quad (52.10)$$

Теперь воспользуемся законом Джоуля—Ленца, согласно которому тепловые потери в 1 см провода определяются его сопротивлением R и равны

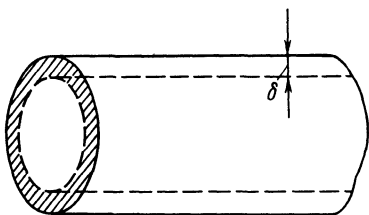


Рис. 52.3

$$\begin{aligned}
 R\tilde{I}^2 &= 2\pi \int_0^a (r/\sigma) \tilde{j}^2 dr = \\
 &= \pi\sigma E_0^2 \int_0^a e^{-2(a-r)/\delta} r dr \approx \\
 &\approx \pi a \sigma \delta E_0^2 / 2. \quad (52.11)
 \end{aligned}$$

Замечая, что $\tilde{I}^2 = (\pi a \sigma \delta E_0)^2$, найдем сопротивление 1 см провода:

$$R = (2\pi a \sigma \delta)^{-1}. \quad (52.12)$$

Анализ этой формулы показывает, что фактически нужно учитывать лишь сопротивление самого скин-слоя (рис. 52.3), т. е. в обычной формуле для сопротивления $R = (\sigma S)^{-1}$ вместо поперечного сечения $S = \pi a^2$ нужно подставлять площадь кольца толщиной δ . Приближение такого рода, основанное на неравенстве $a \gg \delta$, обычно называется *приближением Рэлея*.

Задача 52.2. Подсчитать внутреннюю индуктивность 1 см провода радиусом a в рэлеевском приближении.

Однако опыт показал, что зависимость сопротивления провода от частоты типа $R \sim \sqrt{\omega}$, как предписывает формула (52.12), сохраняется далеко не для всех частот, удовлетворяющих условию квазистационарности (49.8). Оказалось, что в области достаточно высоких частот, при которых глубина проникновения поля в проводник и длина свободного пробега l_0 электронов в металле сравнимы, т. е. $\delta \lesssim l_0$ или

$$c^2 / (2\pi\sigma\mu l_0^2) \lesssim \omega \ll \sigma/\epsilon, \quad (52.13)$$

наблюдается более быстрый рост сопротивления с частотой. Это явление, получившее название *аномального скин-эффекта*, объясняется тем, что при $\delta \lesssim l_0$ перестает быть справедливым локальный закон Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. В самом деле, если, например, воспользоваться электронной моделью Друде, то электрическое поле будет разгонять электроны не в течение времени их свободного пробега, как предполагалось в этой модели, а в течение времени их пребывания в скин-слое, причем напряженность поля существенно меняется на протяжении этого слоя. Таким образом, электроны будут находиться в области ускоряющего их поля гораздо меньшее время, что приведет к уменьшению силы тока или эквивалентному возрастанию сопротивления. Как можно показать*, длина свободного пробега электронов растёт с убыванием температуры T быстрее, чем T^{-1} , так что условие (52.13) выполнено и для обычных частот, но при низких температурах. Таким образом, условия для проявления аномального скин-эффекта выполняются как при высоких частотах и нормальных температурах, так и в области обычных частот, но низких температур.

Удовлетворительное объяснение аномального скин-эффекта было дано Г. Реттером и Э. Зондхаймером в 1948 г. Они пришли к следующей нелокальной связи \mathbf{j} и \mathbf{E} , обобщающей локальный закон Ома:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi l_0} \int \frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}\mathbf{E}')}{R^4} e^{-R/l_0} dV', \quad (52.14)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Таким образом, согласно (52.14), плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ определяется напряженностью \mathbf{E} поля в некоторой окрестности точки \mathbf{r} с размерами порядка l_0 .

* См.: Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., 1963. С. 338—342.

Задача 52.3. Показать, что в пределе $l_0 \rightarrow 0$ закон Рейтера—Зондхаймера (52.14) переходит в обычный закон Ома.

Задача 52.4. Показать, что в рэлеевском приближении сила, действующая на проводящее тело в переменном магнитном поле частоты ω , может быть записана в виде

$$\vec{F} = \frac{\delta\sigma}{2c} \oint_S [\vec{E}\vec{B}] dS, \quad (52.15)$$

где S —поверхность тела.

§ 53. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

Рассмотрим длинную двухпроводную линию (рис. 53.1). Введем емкость C , индуктивность L и сопротивление R линии на 1 см которые будем считать постоянными величинами. Тогда для участка δx линии эти параметры, очевидно, равны:

$$\delta C = C\delta x, \quad \delta L = L\delta x, \quad \delta R = R\delta x.$$

Найдем уравнения для силы тока I и напряжения U в линии, являющихся некоторыми функциями t и x . В качестве исходных возьмем уравнения (49.6), из которых, в частности, вытекает закон сохранения заряда в обычной форме: $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$.

Заряд $\delta Q = \delta x C U$ участка линии δx может изменяться как из-за разности сил токов в точках x и $x + \delta x$, так и из-за утечки (разряд линии). Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta Q = \delta x C \frac{\partial U}{\partial t} = I(x) - I(x + \delta x) - G\delta x U, \quad (53.1)$$

где последний член, в котором $G = \text{const}$, описывает утечку в линии согласно закону Ома. Переходя в (53.1) к пределу $\delta x \rightarrow 0$, находим

$$C\partial U/\partial t + \partial I/\partial x + GU = 0. \quad (53.2)$$

Наконец, запишем второй закон Кирхгофа для участка δx линии:

$$\delta x RI = -\delta x Lc^{-2} \partial I/\partial t + U(x) - U(x + \delta x),$$

откуда после перехода к пределу $\delta x \rightarrow 0$ выводим

$$IR = -Lc^{-2} \partial I/\partial t - \partial U/\partial x. \quad (53.3)$$

Уравнения (53.2) и (53.3) называются *телеграфными* и являются основными при описании процессов в длинных линиях.

Дифференцируя (53.2) по x , а (53.3), умноженное на C ,—по t и вычитая полученные уравнения одно из другого, находим

$$(L/c^2) C \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - G \frac{\partial U}{\partial x} + RC \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (53.4)$$

Подставляя в (53.4) $\partial U/\partial x$, взятое из (53.3), приходим к уравнению

$$\left[LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (GL + c^2 RC) \frac{\partial}{\partial t} + c^2 GR \right] I = 0. \quad (53.5)$$