Задача 52.3. *Показать, что в пределе $l_0 \to 0$ закон Рейтера—Зондхаймера* (52.14) *переходит в обычный закон Ома.*

Задача 52.4. *Показать, что в рэлеевском приближении сила, действующая на проводящее тело в переменном магнитном поле частоты* ω, *может быть записана в виде*

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\delta\sigma}{2c} \oint_S \widetilde{[\mathbf{EB}]}\, \mathrm{d}S, \tag{52.15}$$

где S — поверхность тела.

§ 53. ДЛИННЫЕ ЛИНИИ

Рассмотрим длинную двухпроводную линию (рис. 53.1). Введем емкость C, индуктивность L и сопротивление R линии на 1 см которые будем считать постоянными величинами. Тогда для участка δx линии эти параметры, очевидно, равны:

$$\delta C = C\delta x, \quad \delta L = L\delta x, \quad \delta R = R\delta x.$$

Найдем уравнения для силы тока I и напряжения U в линии, являющихся некоторыми функциями t и x. В качестве исходных возьмем уравнения (49.6), из которых, в частности, вытекает закон сохранения заряда в обычной форме: $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$.

Заряд $\delta Q = \delta x C U$ участка линии δx может изменяться как из-за разности сил токов в точках x и $x + \delta x$, так и из-за утечки (разряд линии). Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta Q = \delta x C \frac{\partial U}{\partial t} = I(x) - I(x + \delta x) - G\delta x U, \tag{53.1}$$

где последний член, в котором $G = \mathrm{const}$, описывает утечку в линии согласно закону Ома. Переходя в (53.1) к пределу $\delta x \to 0$, находим

$$C\partial U/\partial t + \partial I/\partial x + GU = 0. \tag{53.2}$$

Наконец, запишем второй закон Кирхгофа для участка δx линии:

$$\delta x R I = -\delta x L c^{-2} \partial I/\partial t + U(x) - U(x + \delta x),$$

откуда после перехода к пределу $\delta x \to 0$ выводим

$$IR = -Lc^{-2}\partial I/\partial t - \partial U/\partial x. \tag{53.3}$$

Уравнения (53.2) и (53.3) называются *телеграфными* и являются основными при описании процессов в длинных линиях.

Дифференцируя (53.2) по x, а (53.3), умноженное на C,— по t и вычитая полученные уравнения одно из другого, находим

$$(L/c^2)\, C \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - G\frac{\partial U}{\partial x} + RC\frac{\partial I}{\partial t} = 0. \tag{53.4}$$

Подставляя в (53.4) $\partial U/\partial x$, взятое из (53.3), приходим к уравнению

$$\left[LC\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (GL + c^2 RC)\frac{\partial}{\partial t} + c^2 GR\right] I = 0. \tag{53.5}$$

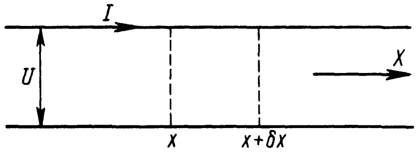

Рис. 53.1

Замечая, что уравнение (53.5) содержит волновой оператор, отвечающий скорости распространения волны

$$v_ф = c(LC)^{-1/2}, \qquad (53.6)$$

попробуем искать решение этого уравнения в виде

$$I(t,\ x) = f(x - v_ф t)\,\xi(x), \qquad (53.7)$$

что соответствует *неискаженной волне*, форма которой сохраняется, а амплитуда изменяется вдоль линии.

Подставляя (53.7) в (53.5) и приравнивая нулю коэффициенты при независимых функциях f и f', имеем

$$\xi'' - GR\xi = 0,\ \ 2c^2\xi' + \xi v_ф(GL + c^2RC) = 0,$$

откуда

$$\xi(x) = e^{-\sqrt{GR}\,x},\ \ -2c^2(GR)^{1/2}v_ф^{-1} + GL + c^2RC = 0. \qquad (53.8)$$

Последнее соотношение в (53.8) с учетом (53.6) принимает вид

$$(\sqrt{GL} - c\sqrt{RC}\,)^2 = 0,$$

и поэтому неискаженная волна существует только при выполнении условия

$$c^{-1}\sqrt{L/C} = \sqrt{R/G} \equiv a. \qquad (53.9)$$

Как видно из (53.8), амплитуда неискаженной волны экспоненциально затухает вдоль линии*. Для определения волны напряжения $U(t,\ x)$ воспользуемся уравнением (53.3), подставляя в которое (53.7) имеем

$$\partial U/\partial x = a\xi\,(f' - \sqrt{GR}\,f),$$

откуда

$$U(t,\ x) = a\xi f = aI(t,\ x), \qquad (53.10)$$

т. е. вдоль линии сохраняется постоянным отношение

$$U(t,\ x)/I(t,\ x) = a = c^{-1}\sqrt{L/C}\,, \qquad (53.11)$$

называемое *волновым сопротивлением линии*.

Если на конце линии поставить нагрузку $R_н$, то для непрерывности U и I необходимо выполнение условия

$$R_н = c^{-1}\sqrt{L/C}\,, \qquad (53.12)$$

---

* Неискаженные волны были предсказаны *О. Хевисайдом* в 1887 г.

называемого *условием согласования нагрузки с линией*. В этом случае в линии по-прежнему нет искажений, т. е. отсутствует отраженная волна.

Итак, мы нашли волны тока и напряжения в двухпроводной линии без искажений. Однако в произвольной линии условие (53.9) может и не выполняться. В этом случае форма волны оказывается более сложной. Для ее нахождения удобно воспользоваться методом Фурье, положив

$$I(t,\ x)=\int I(\omega)\exp\left[ik(\omega)x-i\omega t\right]d\omega, \tag{53.13}$$

где $k(\omega)$ — неизвестная функция, подбираемая так, чтобы $I(t,\ x)$ удовлетворяло уравнению (53.5). Нетрудно видеть, что это выполняется при условии

$$c^2k^2(\omega)=\omega^2LC+i\omega\left(GL+c^2RC\right)-c^2GR. \tag{53.14}$$

Уравнение (53.14), называемое *дисперсионным уравнением двухпроводной линии*, имеет для $k(\omega)$ два очевидных решения, отличающихся знаком и соответствующих двум типам бегущих волн в линии — прямой и отраженной.

§ 54. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ДЕФОРМИРУЮЩИХСЯ ПРОВОДНИКАХ (МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА)

Одним из важнейших приложении теории квазистационарных полей является описание электромагнитных процессов в движущихся проводящих жидкостях и газах (астрофизика, физика плазмы). Если среда характеризуется значительной удельной проводимостью σ(обычно $\sigma\sim10^{17}\ \text{c}^{-1}$) и магнитной проницаемостью $\mu\approx1$, то уравнения Максвелла в квазистационарном приближении примут вид

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}=\frac{4\pi}{c}\left\{\rho\mathbf{u}+\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{uB}]\right)\right\},\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\ \operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho,\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\end{gathered} \tag{54.1}$$

где $\mathbf{u}(t,\ \mathbf{r})$ — локальная скорость движения среды. Эта скорость подчиняется гидродинамическим уравнениям движения, в которых кроме обычных сил давления, вязкости, тяготения и других внешних сил необходимо учитывать и силу Лоренца

$$\mathbf{f}=\rho\mathbf{E}+[\mathbf{jB}]/c. \tag{54.2}$$

Если ограничиться наиболее простым случаем несжимаемой среды и пренебречь силами вязкости и тяготения, то основные уравнения гидродинамики запишутся в виде

$$\begin{gathered}\tau\left[\partial\mathbf{u}/\partial t+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\right]=-\nabla p+\rho\mathbf{E}+[\mathbf{jB}]/c, \qquad (54.3)\\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0,\ \ \tau=\text{const}.\end{gathered}$$