называемого *условием согласования нагрузки с линией.* В этом случае в линии по-прежнему нет искажений, т. е. отсутствует отраженная волна.

Итак, мы нашли волны тока и напряжения в двухпроводной линии без искажений. Однако в произвольной линии условие (53.9) может и не выполняться. В этом случае форма волны оказывается более сложной. Для ее нахождения удобно воспользоваться методом Фурье, положив

$$I(t,\ x)=\int I(\omega)\exp\left[ik(\omega)x-i\omega t\right]d\omega, \tag{53.13}$$

где $k(\omega)$ — неизвестная функция, подбираемая так, чтобы $I(t,\ x)$ удовлетворяло уравнению (53.5). Нетрудно видеть, что это выполняется при условии

$$c^2k^2(\omega)=\omega^2LC+i\omega\left(GL+c^2RC\right)-c^2GR. \tag{53.14}$$

Уравнение (53.14), называемое *дисперсионным уравнением двухпроводной линии*, имеет для $k(\omega)$ два очевидных решения, отличающихся знаком и соответствующих двум типам бегущих волн в линии — прямой и отраженной.

§ 54. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ В МЕДЛЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ДЕФОРМИРУЮЩИХСЯ ПРОВОДНИКАХ (МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА)

Одним из важнейших приложении теории квазистационарных полей является описание электромагнитных процессов в движущихся проводящих жидкостях и газах (астрофизика, физика плазмы). Если среда характеризуется значительной удельной проводимостью σ(обычно $\sigma\sim10^{17}\ \text{c}^{-1}$) и магнитной проницаемостью $\mu\approx1$, то уравнения Максвелла в квазистационарном приближении примут вид

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}=\frac{4\pi}{c}\left\{\rho\mathbf{u}+\sigma\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{uB}]\right)\right\},\\ \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho,\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\end{gathered} \tag{54.1}$$

где $\mathbf{u}(t,\ \mathbf{r})$ — локальная скорость движения среды. Эта скорость подчиняется гидродинамическим уравнениям движения, в которых кроме обычных сил давления, вязкости, тяготения и других внешних сил необходимо учитывать и силу Лоренца

$$\mathbf{f}=\rho\mathbf{E}+[\mathbf{jB}]/c. \tag{54.2}$$

Если ограничиться наиболее простым случаем несжимаемой среды и пренебречь силами вязкости и тяготения, то основные уравнения гидродинамики запишутся в виде

$$\tau\left[\partial\mathbf{u}/\partial t+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\right]=-\nabla p+\rho\mathbf{E}+[\mathbf{jB}]/c, \tag{54.3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\quad \tau=\text{const}.$$

Здесь τ — плотность массы; p — давление, определяемое из уравнения состояния среды как некоторая функция плотности τ и температуры T: $p=p(\tau,\ T)$.

Если допустить, что среда квазинейтральна, т. е. $\rho\approx 0$, что оправдано в случае высокой проводимости (эффект рассасывания), то можно положить

$$\mathbf{j}=c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}/(4\pi)\approx\sigma\left(\mathbf{E}+[\mathbf{uB}]/c\right)$$

и выразить напряженность электрического поля через скорость $\mathbf{u}$ жидкости и индукцию $\mathbf{B}$ магнитного поля:

$$\mathbf{E}=-\left([\mathbf{uB}]-\nu_{\mathrm{m}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right)/c, \tag{54.4}$$

где введена магнитная вязкость $\nu_{\mathrm{m}}\equiv c^2/(4\pi\sigma)$. Подставляя (54.4) в уравнение $c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t$, находим

$$\partial\mathbf{B}/\partial t=\mathrm{rot}\,[\mathbf{uB}]-\nu_{\mathrm{m}}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B},$$

или с учетом уравнения $\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t=\mathrm{rot}\,[\mathbf{uB}]+\nu_{\mathrm{m}}\Delta\mathbf{B}. \tag{54.5}$$

Как видно, уравнение (54.5) кроме диффузионного члена $\nu_{\mathrm{m}}\Delta\mathbf{B}$, присутствие которого приводит (см. задачу **52.1**) к затухающим во времени решениям, содержит еще вихревой член $\mathrm{rot}\,[\mathbf{uB}]$. Поэтому вполне можно ожидать, что при соответствующих движениях среды уравнение (54.5) будет допускать и незатухающие решения. Поиск таких решений представляет собой сложную математическую задачу, известную как *проблема генерации магнитного поля*. К решению этой задачи сводится, в частности, объяснение земного магнетизма.

Задача 54.1. *Показать, что вращательное движение среды не приводит к генерации магнитного поля.*

Соотношение (54.4) позволяет исключить напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля из исходных уравнений, в результате чего получается следующая система уравнений для определения скорости $\mathbf{u}$ движения среды и индукции $\mathbf{B}$ магнитного поля:

$$\begin{gathered}\tau\left[\partial\mathbf{u}/\partial t+(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}\right]=-\nabla p-[\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}]/(4\pi),\\ \partial\mathbf{B}/\partial t=\mathrm{rot}\,[\mathbf{uB}]+\nu_{\mathrm{m}}\Delta\mathbf{B},\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u}=\mathrm{div}\,\mathbf{B}=0.\end{gathered} \tag{54.6}$$

Разрешив ее, можно найти напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля и плотность заряда $\rho=\mathrm{div}\,\mathbf{E}/(4\pi)$, используя (54.4). Приближение, основанное на уравнениях (54.4) и (54.6), называется в связи с этим *приближением магнитной гидродинамики*.

Характер решений уравнений магнитной гидродинамики, как и в обычной гидродинамике, существенно зависит от числового значения одного безразмерного параметра, получившего название *магнитного числа Рейнольдса*. Это число возникает при оценке диффузионного члена в правой части уравнения (54.5). Если область характерного изменения индукции магнитного поля имеет размер l, а средняя скорость движения среды равна v, то порядок вихревого члена $\operatorname{rot}[\mathbf{uB}]$ есть vB/l, тогда как порядок диффузионного члена $\nu_m \Delta B$ есть $\nu_m B/l^2$. Отношение этих двух величин и есть магнитное число Рейнольдса:

$$R_m = vl/\nu_m = 4\pi\sigma vl/c^2. \tag{54.7}$$

В качестве примера оценим магнитное число Рейнольдса для солнечного пятна с характерным размером $l \sim 10^4$ км, средней скоростью солнечной плазмы $v \sim 1$ км/с и электропроводимостью $\sigma \sim 10^{13}$ с$^{-1}$. Подстановка этих данных в (54.7) дает $R_m = 10^7$. Оказывается, что для большинства космических объектов магнитное число Рейнольдса велико. Оно становится малым лишь в равновесии, когда малы скорости движения среды.

В дальнейшем мы ограничимся случаем больших чисел R_m, когда магнитно-диффузионным членом можно пренебречь, т. е. считать $\nu_m \to 0$. В этом приближении, согласно (54.4), можно положить

$$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + [\mathbf{uB}]/c = 0. \tag{54.8}$$

Но это означает в соответствии с законом электромагнитной индукции (50.5), что для всякого контура C, связанного со средой,

$$\oint_C (\mathbf{E}' d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = 0, \tag{54.9}$$

т. е. магнитный поток сквозь такой контур остается неизменным. Отсюда следует, что в процессе движения среды магнитное поле не отстает от нее, т. е. линии индукции оказываются как бы привязанными к веществу, или, образно говоря, «вмороженными» в него.

Эффект «вмороженности» магнитного поля в вещество играет чрезвычайно важную роль во многих астрофизических явлениях. Например, американский астрофизик Э. *Паркер* использовал этот эффект для объяснения происхождения магнитных полей на Солнце (теория солнечных пятен). Согласно ему, генерация магнитного поля на Солнце обязана нерегулярному турбулентному движению

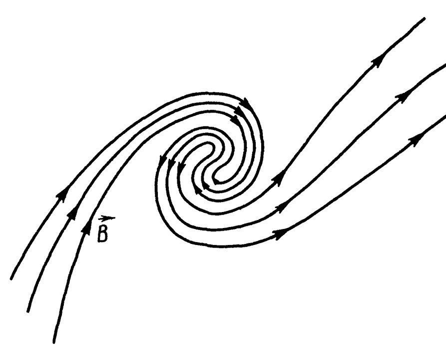

Рис. 54.1

солнечной плазмы. Качественно это объясняется тем, что при турбулентном движении линии индукции, увлекаясь средой, сильно закручиваются, что и приводит к увеличению интенсивности поля (рис. 54.1). Чтобы понять, почему это происходит, рассмотрим участок магнитной силовой трубки длиной l и с поперечным сечением S. Учитывая закон сохранения массы вещества в трубке и магнитного потока сквозь ее сечение, имеем

$$\tau l S = \text{const}, \quad BS = \text{const}.$$

Отсюда выводим соотношение

$$B/(\tau l) = \text{const}, \tag{54.10}$$

из которого следует, что при всяком удлинении векторной трубки и незначительном изменении плотности среды должно происходить усиление индукции магнитного поля. Нетрудно видеть, что при турбулентном движении среды как раз и происходит удлинение векторных трубок вследствие сильного закручивания линий индукции.

Еще одним важным следствием эффекта «вмороженности» магнитного поля в вещество являются *магнитогидродинамические волны*, или *волны Альвеена*, названные так по имени известного шведского астрофизика, впервые предсказавшего их. Физическая природа этих волн такова. Если проводящая жидкость (или газ) находится в постоянном магнитном поле $\mathbf{B}_0$ и перпендикулярно вектору индукции этого поля в жидкости возникли некоторые локальные смещения, то вследствие «вмороженности» поля в вещество линии индукции должны изогнуться. Но при этом в среде возникают силы, препятствующие этому изгибу, в чем нетрудно убедиться, проанализировав структуру силы Лоренца в магнитной гидродинамике.

Задача 54.2. *Показать, что плотность силы Лоренца в магнитной гидродинамике можно представить в виде*

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{n}B^2}{4\pi R} + \frac{\mathbf{B}}{4\pi}\frac{\partial B}{\partial s} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right), \tag{54.11}$$

где R — радиус кривизны линии индукции, $\mathbf{n}$ — главная нормаль к ней, s — координата вдоль линии. Дать интерпретацию каждого члена в (54.11).

Таким образом, мы убеждаемся, что линии индукции сопротивляются своему изгибу и ведут себя как упругие струны (вспомните наглядные представления Фарадея о магнитных силовых линиях — шнурах). Поэтому неудивительно, что вдоль магнитного поля в проводящей жидкости могут распространяться волны искривления. Для их количественного описания воспользуемся основными уравнениями магнитной гидродинамики (54.6). Предположим, что невозмущенная жидкость движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ в постоянном и однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0$. Для возмущенной жидкости

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{v}, \quad \mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{b},$$

где возмущения скорости $\mathbf{v}$ и индукции $\mathbf{b}$ магнитного поля подчиним условиям

$$(\mathbf{v}\mathbf{B}_0)=(\mathbf{b}\mathbf{B}_0)=0, \quad [\mathbf{b}\mathbf{v}]=0. \tag{54.12}$$

Для того чтобы удовлетворить уравнениям $\operatorname{div}\mathbf{v}=\operatorname{div}\mathbf{b}=0$, предположим, что все величины не меняются при смещении вдоль $\mathbf{v}$ или $\mathbf{b}$, т. е. будем рассматривать возмущения типа плоских волн, зависящие лишь от одной из координат плоскости, перпендикулярной $\mathbf{v}$ или $\mathbf{b}$. Иначе говоря, примем, что

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{b}=0. \tag{54.13}$$

С учетом (54.12) и (54.13) уравнения (54.6) примут вид

$$\begin{gathered}\tau\left[\frac{\partial v}{\partial t}+(\mathbf{u}_0\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla\left(p+\frac{b^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{b},\\ \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}=\operatorname{rot}[\mathbf{u}_0\mathbf{b}]+\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]+\nu_m\Delta\mathbf{b}.\end{gathered} \tag{54.14}$$

Умножая первое уравнение (54.14) скалярно на $\mathbf{B}$ и принимая во внимание (54.12), находим $(\mathbf{B}_0\nabla)[p+b^2/(8\pi)]=0$, откуда вытекает, что

$$p+b^2/(8\pi)=\mathrm{const}, \tag{54.15}$$

т. е. сумма гидродинамического и магнитного давлений для рассмотренного типа возмущений остается постоянной. Учитывая (54.15) и замечая, что $\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]=(\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{v}$, $\operatorname{rot}[\mathbf{u}_0\mathbf{b}]=-(\mathbf{u}_0\nabla)\mathbf{b}$, преобразуем (54.14):

$$\begin{gathered}[\partial/\partial t+(\mathbf{u}_0\nabla)]\mathbf{v}=(\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{b}/(4\pi\tau),\\ [\partial/\partial t+(\mathbf{u}_0\nabla)]\mathbf{b}=(\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{v}+\nu_m\Delta\mathbf{b}.\end{gathered} \tag{54.16}$$

Действуя на второе уравнение (54.16) оператором $\partial/\partial t+(\mathbf{u}_0\nabla)$ и учитывая первое уравнение, для индукции $\mathbf{b}$ получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{u}_0\nabla)\right]^2\mathbf{b}=\frac{1}{4\pi\tau}(\mathbf{B}_0\nabla)^2\mathbf{b}+\nu_m\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{u}_0\nabla)\right]\Delta\mathbf{b} \tag{54.17}$$

и такое же уравнение для скорости $\mathbf{v}$.

Предположим сначала, что магнитное число Рейнольдса R_m достаточно велико и поэтому магнитной диффузией можно пренебречь, положив $\nu_m=0$. В таком случае, полагая, что волны в жидкости распространяются в направлении $\mathbf{s}$ со скоростью v_A, имеем

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}[(\mathbf{s}\mathbf{r})-(\mathbf{s}\mathbf{u}_0)t-v_At], \quad \mathbf{b}=\mathbf{b}[(\mathbf{s}\mathbf{r})-(\mathbf{s}\mathbf{u}_0)t-v_At].$$

Тогда из (54.17) выводим

$$4\pi\tau v_A^2(\mathbf{s}\nabla)^2\mathbf{b}=(\mathbf{B}_0\nabla)^2\mathbf{b}. \tag{54.18}$$

Замечая, что $(\mathbf{B}_0\nabla)\mathbf{b}=(\mathbf{B}_0\mathbf{s})(\mathbf{s}\nabla)\mathbf{b}$, из (54.18) находим *скорость распространения волн Альвеена*:

$$v_{\mathrm{A}}=(\mathbf{B}_0\mathbf{s})/\sqrt{4\pi\tau}=\cos\vartheta\,\mathbf{B}_0/\sqrt{4\pi\tau}, \tag{54.19}$$

где ϑ — угол между направлением распространения волны и вектором индукции $\mathbf{B}_0$. Таким образом, скорость волн, распространяющихся вдоль линий индукции магнитного поля, оказывается максимальной и равной $B_0/\sqrt{4\pi\tau}$. Особенность волн Альвеена состоит в том, что они поперечны и могут иметь как угодно большую амплитуду, так как нигде в процессе вывода не делалось предположения о ее малости.

Если же не пренебрегать магнитной вязкостью, то волны Альвеена должны затухать. Так, рассматривая монохроматическую волну вида

$$\mathbf{b}=\mathbf{b}_0\exp\left[i(\mathbf{kr})-i\omega t\right],$$

из (54.17) получаем дисперсионное уравнение

$$[\omega-(\mathbf{ku}_0)]^2-(\mathbf{B}_0\mathbf{k})^2/(4\pi\tau)+i\nu_{\mathrm{m}}k^2[\omega-(\mathbf{ku}_0)]=0. \tag{54.20}$$

Полагая $\omega=\omega'+i\omega''$, $\omega''\ll\omega'$, из (54.20) находим

$$\omega'\approx(\mathbf{ku}_0)\pm(\mathbf{kB}_0)/\sqrt{4\pi\tau},\quad \omega''\approx-\nu_{\mathrm{m}}k^2/2, \tag{54.21}$$

что соответствует волне Альвеена, амплитуда которой затухает по закону

$$b\sim\exp\left(-\nu_{\mathrm{m}}k^2t/2\right). \tag{54.22}$$

Задача 54.3. *Во многих астрофизических исследованиях делается гипотеза о существовании в космическом пространстве бессиловых магнитных полей* $\mathbf{B}$, *обращающих в нуль силу Лоренца и поэтому не нарушающих равновесия среды. Бессиловое поле подчиняется уравнению*

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\alpha\mathbf{B}, \tag{54.23}$$

где α — *некоторая постоянная. Найти общий вид бессилового поля и показать, что в пренебрежении магнитной вязкостью оно реализует минимум энергии магнитного поля в области, на границе которой поле стационарно.*

§ 55. МАГНИТНАЯ КУМУЛЯЦИЯ

В 1952 г. была теоретически предсказана возможность генерации сверхсильных магнитных полей (десятки миллионов эрстед) при быстром пластическом обжатии проводящих оболочек, охватывающих магнитный поток. Достаточно быстрое обжатие оболочек предполагалось осуществить с помощью направленного (кумулятивного) взрыва. Впоследствии были сконструированы и практически реализованы специальные взрывомагнитные устройства, в которых сходящаяся взрывная ударная волна производила пластическое сжатие и деформацию проводящего цилиндра или