нения движения зарядов были ковариантны по отношению к преобразованиям Лоренца. В связи с этим введение неподвижного электромагнитного эфира оказывается излишним.

§ 57. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА—ЛОРЕНЦА И МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Согласно вышеизложенным постулатам, уравнения Максвелла—Лоренца для микрополей **e** и **b** имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{b}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^{\text{микр}},\qquad \operatorname{div}\mathbf{e}=4\pi\rho^{\text{микр}},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{e}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t},\qquad \operatorname{div}\mathbf{b}=0. \tag{57.1}$$

При этом микроскопические плотности заряда и тока могут быть представлены в форме

$$\rho^{\text{микр}}(t,\ \mathbf{r})=\sum_i\rho_i(t,\ \mathbf{r});\quad \mathbf{j}^{\text{микр}}(t,\ \mathbf{r})=\sum_i\mathbf{j}_i(t,\ \mathbf{r}),$$

где ρ_i, $\mathbf{j}_i$—плотности заряда и тока для отдельной заряженной частицы номера i. Если частицы считать точечными, то

$$\rho_i=\rho_i^{\text{точ}}(t,\ \mathbf{r})=e_i\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)],$$
$$\mathbf{j}_i=\mathbf{j}_i^{\text{точ}}(t,\ \mathbf{r})=e_i\mathbf{v}_i\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)],$$

где $\mathbf{r}_i(t)$—радиус-вектор положения частицы, $\mathbf{v}_i(t)$—ее скорость, e_i—заряд. Но в таком случае не учитывается, например, тот важный факт, что заряженные частицы могут обладать собственными магнитными и электрическими дипольными моментами. Используя представления (2.12) и (2.13) для плотностей связанных зарядов и токов, учтем подобные структурные эффекты, добавив к $\rho_i^{\text{точ}}$ и $\mathbf{j}_i^{\text{точ}}$ следующие источники:

$$\rho_i'=-\operatorname{div}\boldsymbol{\pi}_i,\quad \mathbf{j}_i'=\partial\boldsymbol{\pi}_i/\partial t+c\operatorname{rot}\boldsymbol{\mu}_i,$$

где $\boldsymbol{\pi}_i$ и $\boldsymbol{\mu}_i$—вспомогательные векторы, исчезающие вне частицы номера i и в практических расчетах принимаемые δ-образными. Таким образом,

$$\rho^{\text{микр}}(t,\ \mathbf{r})=\sum_i\{e_i\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)]-\operatorname{div}\boldsymbol{\pi}_i\},$$
$$\mathbf{j}^{\text{микр}}(t,\ \mathbf{r})=\sum_i\{e_i\mathbf{v}_i\delta[\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t)]+\partial\boldsymbol{\pi}_i/\partial t+c\operatorname{rot}\boldsymbol{\mu}_i\}. \tag{57.2}$$

Так как заряженные частицы движутся по сложным, запутанным траекториям, то порождаемые ими микрополя **e** и **b** имеют нерегулярную, случайную структуру. В то же время макроскопические поля **E** и **B**, подчиняющиеся уравнениям Максвелла (10.1), являются регулярными функциями, так как порождаются макроскопическими источниками $\rho^{\text{полн}}$ и $\mathbf{j}^{\text{полн}}$, получающимися усреднением соответствующих микроскопических источников

(57.2). Поэтому и макроскопические уравнения Максвелла должны получаться усреднением микроскопических уравнений Максвелла — Лоренца (57.1).

Под усреднением какой-либо микроскопической величины $f(t, \mathbf{r})$ мы будем понимать усреднение по физическому бесконечно малому объему ΔV, определенному соотношением (2.1), и по физическому бесконечно малому интервалу времени Δt, определение которого мы сейчас дадим. Если усреднение по объему необходимо потому, что в макроскопической теории рассматриваются объекты, состоящие из большого числа частиц, то усреднение по времени вызвано тем, что микроскопические поля, даже усредненные по пространству, остаются хаотически изменяющимися во времени в связи с беспорядочным движением порождающих их частиц. Если v_0 — средняя тепловая скорость движения частиц, а l — среднее расстояние между ними, то характерное время изменения микроскопических величин имеет порядок $t_0 = l/v_0$. С другой стороны, всегда можно ввести характерное время T изменения макроскопических величин, в качестве которого обычно берут время релаксации системы (37.13) либо период колебаний в случае периодических процессов. В таком случае *физический бесконечно малый интервал времени* Δt должен удовлетворять условию

$$t_0 \ll \Delta t \ll T. \tag{57.3}$$

Тогда усреднение некоторой микроскопической величины $f(t, \mathbf{r})$ определяется следующим образом:

$$\langle f(t, \mathbf{r})\rangle \equiv \frac{1}{\Delta t \Delta V} \int\limits_{\Delta t} \int\limits_{\Delta V} f(t+t', \mathbf{r}+\mathbf{r}')\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}V'. \tag{57.4}$$

Отсюда видно, что операция усреднения $\langle \ldots \rangle$ *линейна* и обладает свойствами

$$\nabla \langle f\rangle = \langle \nabla f\rangle, \quad \frac{\partial}{\partial t}\langle f\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle. \tag{57.5}$$

Применяя операцию усреднения (57.4) к уравнениям Максвелла — Лоренца и используя (57.5), находим:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\langle \mathbf{b}\rangle = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{e}\rangle + \frac{4\pi}{c}\langle \mathbf{j}^{\text{микр}}\rangle, \qquad \operatorname{div}\langle \mathbf{e}\rangle = 4\pi \langle \rho^{\text{микр}}\rangle, \\ \operatorname{rot}\langle \mathbf{e}\rangle = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{b}\rangle, \qquad \operatorname{div}\langle \mathbf{b}\rangle = 0. \end{gathered} \tag{57.6}$$

Сравнивая систему уравнений (57.6) с уравнениями Максвелла (10.1), убеждаемся, что для их согласования необходимо положить:

$$\begin{gathered} \langle \mathbf{e}\rangle = \mathbf{E}, \qquad \langle \rho^{\text{микр}}\rangle \equiv \rho^{\text{полн}} = \rho - \operatorname{div}\mathbf{P}, \\ \langle \mathbf{b}\rangle = \mathbf{B}, \qquad \langle \mathbf{j}^{\text{микр}}\rangle \equiv \mathbf{j}^{\text{полн}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c\operatorname{rot}\mathbf{M}. \end{gathered} \tag{57.7}$$

Выясним теперь более подробно, пользуясь представлением (57.2) для микроскопических источников, какова структура ρ, $\mathbf{j}$, $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$.

Прежде всего, пользуясь свойством δ-функции, найдем вклад точечных источников в $\rho^{\text{полн}}$ и $\mathbf{j}^{\text{полн}}$:

$$\begin{gathered}\langle \rho^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta t \Delta V} \int\limits_{\Delta t} \sum_{i \in \Delta V'} e_i \, \mathrm{d}t', \\ \langle \mathbf{j}^{\text{точ}}(t, \mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\Delta t \Delta V} \int\limits_{\Delta t} \sum_{i \in \Delta V'} e_i \mathbf{v}_i(t+t') \, \mathrm{d}t',\end{gathered} \tag{57.8}$$

где символ $i \in \Delta V'$ означает, что суммирование проводится по всем зарядам, которые в момент времени $t+t'$ оказались в объеме ΔV с центром в точке $\mathbf{r}$. Отсюда видно, что выражения (57.8) отличаются от (2.2) и (2.5) только дополнительным усреднением по времени.

Оценим теперь вклад в (57.8) связанных зарядов, которые будем обозначать индексом α. Пусть некоторая молекула номера k имеет объем V_k. Чтобы найти ее вклад в $\rho^{\text{точ}}$ и $\mathbf{j}^{\text{точ}}$, заметим (на основе неравенства $V_k \ll \Delta V$), что для всякого заряда номера α, принадлежащего молекуле, $|\mathbf{r}_\alpha|^3 \ll \Delta V$, если начало координат поместить в центр масс молекулы. Так как в дальнейшем будет производиться усреднение по объему ΔV, то в $\rho^{\text{точ}}$ можно провести разложение по степеням $\mathbf{r}_\alpha$. В таком случае, обозначая $\rho^{\text{точ}}_{(k)}$ вклад молекулы номера k в $\rho^{\text{точ}}$, имеем

$$\rho^{\text{точ}}_{(k)}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\alpha \in V_k} e_\alpha \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\alpha \in V_k} (\mathbf{r}_\alpha \nabla)^n e_\alpha \delta(\mathbf{r}),$$

что соответствует обычному разложению по мультиполям. Если же учесть условие нейтральности молекулы, согласно которому

$$\sum_{\alpha \in V_k} e_\alpha = 0,$$

то

$$\rho^{\text{точ}}_{(k)}(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\alpha \in V_k} (\mathbf{r}_\alpha \nabla)^n e_\alpha \delta(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}^{\text{точ}}_{(k)}, \tag{57.9}$$

где

$$\mathbf{P}^{\text{точ}}_{(k)} = \sum_{\alpha \in V_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e_\alpha \mathbf{r}_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \nabla)^{n-1} \delta(\mathbf{r}). \tag{57.10}$$

Задача 57.1. *Показать, что вклад отдельной молекулы номера k в $\mathbf{j}^{\text{точ}}$ может быть представлен в виде $\partial \mathbf{P}^{\text{точ}}_{(k)} / \partial t + c \operatorname{rot} \mathbf{M}^{\text{точ}}_{(k)}$, где*

$$\mathbf{M}^{\text{точ}}_{(k)} = \sum_{\alpha \in V_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(n+1)!} \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{r}_\alpha \mathbf{v}_\alpha] (\mathbf{r}_\alpha \nabla)^{n-1} \delta(\mathbf{r}). \tag{57.11}$$

Теперь уже нетрудно получить явное выражение для поляризованности $\mathbf{P}$ и намагниченности $\mathbf{M}$. Для этого достаточно просуммировать (57.10) и (57.11) по всем молекулам и учесть в соответствии с (57.2) собственные магнитные и дипольные моменты заряженных частиц. В результате после усреднения получаем

$$\mathbf{P}=\sum_i \langle \pi_i \rangle+\frac{1}{\Delta V}\tilde{\sum_{\alpha\in\Delta V}} e_\alpha \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{M}=\sum_i \langle \mu_i \rangle+\frac{1}{2c\Delta V}\tilde{\sum_{\alpha\in\Delta V}} e_\alpha [\mathbf{r}_\alpha \mathbf{v}_\alpha], \tag{57.12}$$

где волнистой чертой обозначено усреднение по интервалу времени Δt. При выводе этих формул мы, используя неравенство $|\mathbf{r}_\alpha|^3 \ll \Delta V$, пренебрегли высшими членами разложения $(n>1)$ в (57.10) и (57.11), относящимися к высшим мультипольным моментам.

Из вида формул (57.12) следует, что векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$, возникающие в электронной теории, отличаются от векторов (7.5) и (8.2) практически лишь дополнительным усреднением по времени. Это обстоятельство позволяет интерпретировать их как средние плотности дипольного и магнитного моментов среды.

Наконец, очевидно, что ρ и $\mathbf{j}$ получаются при усреднении точечных частей микроскопических плотностей свободных зарядов и токов. Обозначая свободные заряды индексом β, имеем

$$\rho=\sum_\beta e_\beta \langle \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\beta) \rangle, \quad \mathbf{j}=\sum_\beta e_\beta \langle \mathbf{v}_\beta \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\beta) \rangle, \tag{57.13}$$

что после усреднения приводится к виду (57.8).

Таким образом, установлено, что макроскопические уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде получаются в электронной теории при пространственно-временном усреднении соответствующих микроскопических уравнений Максвелла — Лоренца. Теперь остается выяснить, как в электронной теории могут быть получены конкретные уравнения состояния вещества типа $\mathbf{P}=\mathbf{P}(\mathbf{E})$, $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathbf{B})$.

Задача 57.2. *Введя микроскопические потенциалы электромагнитного поля, т. е. положив* $\mathbf{e}=-\nabla\varphi-c^{-1}\partial\mathbf{a}/\partial t$, $\mathbf{b}=\operatorname{rot}\mathbf{a}$, *показать, что уравнения Максвелла — Лоренца* (57.1) *могут быть получены из вариационного принципа*

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_V \left[\frac{1}{8\pi}(\mathbf{e}^2-\mathbf{b}^2)+\frac{1}{c}(\mathbf{a}\mathbf{j}^{\text{микр}})-\varphi\rho^{\text{микр}}\right] \mathrm{d}t\,\mathrm{d}V=0 \tag{57.14}$$

при условии, что вариации $\delta\varphi$ *и* $\delta\mathbf{a}$ *исчезают на границах области интегрирования. Вывести отсюда выражение для силы Лоренца.*

§ 58. ДИЭЛЕКТРИКИ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Особенность диэлектриков, т. е. сред, поляризующихся под действием электрического поля, состоит в том, что их молекулы обладают электрическими дипольными моментами $\mathbf{p}$, в общем случае зависящими от действующего на них поля $\mathbf{E}'$. Как будет