

реальный макроскопический образец состоит из многих областей Вейсса (доменов), то нетрудно видеть, что при его перемагничивании также наблюдается явление гистерезиса, хотя оно и осложнено эффектами анизотропии, наличием дефектов кристаллической решетки и т. д. Гладкая кривая (петля гистерезиса) получается при этом усреднением по многим областям Вейсса (см. рис. 60.5).

§ 61. ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ ДИСПЕРСИИ И ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

В оптике хорошо известно явление *дисперсии света*, т. е. зависимость скорости v_ϕ распространения света в среде от его частоты ω . Так как [см. (38.4)]

$$v_\phi = c / \sqrt{\epsilon\mu} \equiv c/n,$$

то показатель преломления среды $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ также зависит от частоты. Подобная зависимость наблюдается не только в оптическом диапазоне, но и для электромагнитных волн любых других частот. Первое удовлетворительное объяснение явления дисперсии и одновременно поглощения электромагнитных волн в средах было дано в рамках электронной теории Лоренца.

Очевидно, что явление дисперсии в первую очередь связано с влиянием электромагнитного поля распространяющейся в среде волны на дипольные моменты молекул: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha \mathbf{E}'$. Для упрощения примем, что молекулы достаточно массивны, а частота ω достаточно велика, поэтому можно пренебречь изменением \mathbf{p}_0 со временем. Таким образом, будем учитывать лишь индуцированный дипольный момент $\alpha \mathbf{E}'$.

В качестве модели молекулы рассмотрим отдельный электрон с зарядом e и массой m_e , смещенный на $\mathbf{r}(t)$ относительно положительно заряженного остова. Если скорость электрона мала по сравнению со скоростью света, т. е. $|\dot{\mathbf{r}}| \ll c$, то в выражении для силы Лоренца $e(\mathbf{E}' + c^{-1}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{B}'])$ можно пренебречь вкладом магнитной индукции \mathbf{B}' волны, поскольку $B' \sim E'$. Принимая еще, что электрон удерживается в молекуле квазиупругой силой $-\mathbf{k}\mathbf{r}$, и учитывая силу реакции излучения, запишем уравнение движения электрона в виде

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{k}\mathbf{r} = e\mathbf{E}' + 2e^2 \ddot{\mathbf{r}} / (3c^3). \quad (61.1)$$

Решение этого уравнения можно использовать для вычисления полной плотности тока $\mathbf{j}^{\text{полн}}$ в среде, если предположить, что основной вклад в нее дают электроны. В частности, считая среду однородной с электронной концентрацией N_e , имеем

$$\mathbf{j}^{\text{полн}} = \langle \mathbf{j}^{\text{микр}} \rangle = N_e e \dot{\mathbf{r}}. \quad (61.2)$$

Запишем теперь усредненные уравнения Максвелла — Лоренца (57.6):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{\text{полн}}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho^{\text{полн}},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

и будем считать все величины в них периодическими во времени:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \\ \rho^{\text{полн}} = \rho_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{j}^{\text{полн}} = \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}.$$

Учитывая, что, по закону сохранения заряда,

$$\rho_\omega = -i \operatorname{div} \mathbf{j}_\omega / \omega \equiv -\operatorname{div} \mathbf{P}_\omega,$$

где

$$\mathbf{P}_\omega = i \mathbf{j}_\omega / \omega \quad (61.3)$$

— поляризованность, запишем уравнения Максвелла в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_\omega + i\omega \mathbf{D}_\omega / c = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}_\omega = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega - i\omega \mathbf{B}_\omega / c = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_\omega = 0. \quad (61.4)$$

Здесь

$$\mathbf{D}_\omega \equiv \mathbf{E}_\omega + 4\pi \mathbf{P}_\omega. \quad (61.5)$$

Для нахождения поляризованности \mathbf{P}_ω воспользуемся уравнениями (61.1) и (61.2). Именно: рассматривая лишь установившееся движение электрона, т. е. полагая

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} \quad (61.6)$$

и считая, что напряженность \mathbf{E}' мало меняется в пределах молекулы, из (61.2) выводим

$$\mathbf{P}_\omega = N_e e \mathbf{r}_0. \quad (61.7)$$

Наконец, принимая напряженность действующего поля равной

$$\mathbf{E}'_\omega = \mathbf{E}_\omega + 4\pi \mathbf{P}_\omega / 3$$

и учитывая (61.6) и (61.7), находим из (61.1)

$$\mathbf{P}_\omega = \frac{\omega_n^2 / (4\pi)}{\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \mathbf{E}_\omega. \quad (61.8)$$

Здесь $\gamma = 2e^2 \omega^2 / (3m_e c^3)$; $\omega_c^2 = \omega_0^2 - \omega_n^2 / 3$, $\omega_0^2 = k/m_e$, $\omega_n^2 = 4\pi N_e e^2 / m_e$, где γ — коэффициент лучистого трения; ω_0 — собственная частота колебаний электрона в изолированном атоме; ω_c — собственная частота электронных колебаний в атоме в среде (т. е. измененная под влиянием полей окружающих атомов); ω_n — плазменная частота, соответствующая колебаниям свободных электронов в квазинейтральной среде (плазменные или ленгмюровские колебания).

Задача 61.1. Показать, что поляризационная плотность заряда ρ_P , возникающая при малом смещении электронов в квазинейтральной плазме, подчиняется уравнению колебаний $\ddot{\rho}_P + \omega_n^2 \rho_P = 0$.

Имея выражение (61.8) для поляризованности, нетрудно найти и вектор электрической индукции:

$$\mathbf{D}_\omega = \mathbf{E}_\omega + 4\pi\mathbf{P}_\omega = \varepsilon\mathbf{E}_\omega, \quad (61.9)$$

где введена комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_n^2 / (\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega). \quad (61.10)$$

Здесь уместно заметить, что γ в (61.10) можно считать коэффициентом лучистого трения только в предположении, что столкновения молекул друг с другом и со свободными электронами маловероятны. В самом деле, в результате столкновений часть энергии электронов переходит в энергию движения самих молекул, т. е. в теплоту. Эти потери энергии электронами необходимо добавить к чисто электромагнитным потерям на излучение. Феноменологически это делается добавлением к γ некоторой не зависящей от ω части.

Полученное выше выражение для $\varepsilon(\omega)$ характерно для *однорезонансной осцилляторной модели вещества*, в которой предполагается, что собственные частоты всех электронов одинаковы и равны ω_c . На самом же деле это не так, тем более что нужно учитывать еще и колебания ионов, собственные частоты которых обычно лежат в инфракрасной области. Для того чтобы учесть все электронные частоты, обычно вводят *функцию распределения дисперсионных электронов* по частотам $f(\omega_c)$. Нормируя ее на единицу, т. е. полагая

$$\int_0^\infty f(\omega_c) d\omega_c = 1,$$

$N_e f(\omega_c) d\omega_c$ можно интерпретировать как концентрацию электронов, собственные частоты которых лежат в интервале $(\omega_c - d\omega_c/2, \omega_c + d\omega_c/2)$. В таком случае выражение (61.10) принимает вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_n^2 \int_0^\infty \frac{f(\omega_c) d\omega_c}{\omega_c^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (61.11)$$

Интересно, что такое же выражение получается и в квантовой теории, где $f(\omega_c)$ называется *силой осциллятора*.

Каков физический смысл комплексной диэлектрической проницаемости? Для выяснения этого выделим действительную и мнимую части $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Тогда

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \omega_n^2 \int_0^\infty \frac{(\omega_c^2 - \omega^2) f(\omega_c) d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (61.12)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \int_0^\infty \frac{f(\omega_c) \gamma \omega \omega_n^2 d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Из (61.12) следует, что ε' является четной, а ε'' — нечетной функциями частоты:

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega); \quad (61.13)$$

и, кроме того, справедливо неравенство

$$\omega \varepsilon''(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{f(\omega_c) \gamma \omega^2 \omega_c^2 d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \geq 0. \quad (61.14)$$

Как было показано еще в § 50, ε'' связано с тепловыми потерями. Для того чтобы убедиться, что это действительно так и что тепловые потери пропорциональны явно положительному значению $\omega \varepsilon''$, подсчитаем среднюю за период $T = 2\pi/\omega$ мощность силы «трения» $\mathbf{F}_{\text{тр}} = -m_e \gamma \dot{\mathbf{r}}$, действующей на отдельный электрон:

$$(\mathbf{F}_{\text{тр}} \dot{\mathbf{r}})^{\sim} = -m_e \gamma (\dot{\mathbf{r}})^2 = -m_e \gamma \omega^2 |\mathbf{r}_0|^2 / 2.$$

Выделяемая тепловая мощность получается умножением этого выражения на концентрацию электронов $N_e f(\omega_c)$ и интегрированием по ω_c :

$$\tilde{q} = N_e (m_e / 2) \gamma \omega^2 \int_0^{\infty} |\mathbf{r}_0|^2 f(\omega_c) d\omega_c.$$

Учитывая выражения для $|\mathbf{r}_0|^2$, вытекающие из (61.7) и (61.8), получаем

$$\tilde{q} = \frac{\gamma}{8\pi} \omega_{\text{п}}^2 \omega^2 |\mathbf{E}_{\omega}|^2 \int_0^{\infty} \frac{f(\omega_c) d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon'' |\mathbf{E}_{\omega}|^2. \quad (61.15)$$

Сравнивая (61.15) с выражением для джоулевых потерь

$$\tilde{q} = \sigma \tilde{E}^2 = \sigma |\mathbf{E}_{\omega}|^2 / 2,$$

приходим к выводу, что электропроводимость $\sigma(\omega)$ среды и $\varepsilon''(\omega)$ связаны между собой:

$$\sigma(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon''(\omega) = \frac{\gamma \omega^2 \omega_{\text{п}}^2}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(\omega_c) d\omega_c}{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (61.16)$$

В частности, для металлов, в которых основной вклад в проводимость дают свободные электроны с $\omega_c = 0$, имеем

$$\sigma(\omega) = \gamma \omega_{\text{п}}^2 / [4\pi(\omega^2 + \gamma^2)]. \quad (61.17)$$

Это соотношение называется *формулой Друде — Зинера* и выражает зависимость электропроводимости металлов от частоты.

Заметим, что с помощью (61.16) выражение для ε приводится к виду

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i4\pi\sigma(\omega)/\omega, \quad (61.18)$$

откуда следует, что для металлов в статическом пределе ε имеет полюсную особенность типа

$$\varepsilon(\omega \rightarrow 0) \approx i4\pi\sigma/\omega, \quad (61.19)$$

где σ — статическая электропроводимость.

Особый интерес представляет структура ε для плазмы, в которой основную роль играют свободные электроны с $\omega_c = 0$, т. е. можно положить $f(\omega_c) = 2\delta(\omega_c)$ и, согласно (61.11),

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_n^2 / [\omega(\omega + i\gamma)]. \quad (61.20)$$

Очевидно, что такое поведение диэлектрической проницаемости характерно для любой среды в пределе чрезвычайно высоких частот, поскольку при $\omega \rightarrow \infty$ все электроны можно считать свободными. Если в (61.20) пренебречь потерями, т. е. положить $\omega \gg \gamma$, то получим

$$\varepsilon(\omega) = 1 - (\omega_n/\omega)^2. \quad (61.21)$$

Изучим теперь распространение электромагнитных волн в диспергирующей среде. Начнем с самых простых плоских монохроматических волн, т. е. положим в уравнениях (61.4)

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad \mathbf{B}_\omega = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})},$$

где \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 — постоянные векторы. Тогда с учетом (61.9) имеем:

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}\mathbf{B}_0] &= -\omega\varepsilon\mathbf{E}_0/c, \quad \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{E}_0) = 0, \\ [\mathbf{k}\mathbf{E}_0] &= \omega\mathbf{B}_0/c, \quad (\mathbf{k}\mathbf{B}_0) = 0. \end{aligned} \quad (61.22)$$

Исключая из этих уравнений \mathbf{B}_0 , приходим к *волновому уравнению*

$$\omega^2\varepsilon\mathbf{E}_0/c^2 = k^2\mathbf{E}_0 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_0), \quad (61.23)$$

которое допускает два типа решений, соответствующих поперечным и продольным волнам.

Поперечные волны удовлетворяют условию $(\mathbf{k}\mathbf{E}_0) = 0$, т. е. векторы \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{k} образуют правую ортогональную тройку (рис. 61.1). В этом случае из волнового уравнения (61.23) выводим, что

$$k^2 = \omega^2\varepsilon(\omega)/c^2, \quad (61.24)$$

т. е. волновой вектор \mathbf{k} является комплексным. Считая, что волна распространяется вдоль оси Z , т. е. полагая $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, имеем

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c = \omega\eta/c, \quad (61.25)$$

где

$$\eta = n + in' = \sqrt{\varepsilon} \quad (61.26)$$

— *комплексный показатель преломления.*

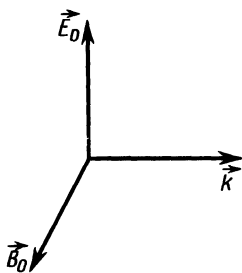


Рис. 61.1

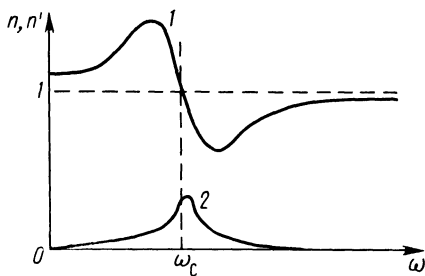


Рис. 61.2

Для выяснения физического смысла n и n' рассмотрим плоскую электромагнитную волну:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-2\pi n'z/\lambda_0} e^{-i\omega(t - nz/c)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{-2\pi n'z/\lambda_0} e^{-i\omega(t - nz/c)}, \quad (61.27)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ — длина волны в вакууме. Отсюда следует, что n' определяет затухание амплитуды волны на расстоянии порядка длины волны λ_0 и поэтому называется *коэффициентом поглощения*. Что же касается n , то это обычный показатель преломления, определяющий скорость перемещения поверхности постоянной фазы $\Phi = \omega(t - nz/c) = \text{const}$, т. е. *фазовую скорость волны* $v_\Phi = c/n$.

Разделяя действительную и мнимую части в соотношении $\sqrt{\epsilon} = n + in'$, находим:

$$n = 2^{-1/2} (|\epsilon| + \epsilon')^{1/2}, \quad n' = 2^{-1/2} (|\epsilon| - \epsilon')^{1/2} = \epsilon''/(2n). \quad (61.28)$$

Зависимость $\eta(\omega)$ в простейшем случае, когда вблизи частоты ω имеется лишь одна изолированная собственная частота ω_c и поэтому можно ограничиться однорезонансным приближением, дана на рис. 61.2 [$n(\omega)$ — кривая 1, $n'(\omega)$ — кривая 2]. Анализ зависимости $n'(\omega)$ показывает, что коэффициент γ , обычно удовлетворяющий условию $\gamma \ll \omega_c$, имеет смысл *ширины линии поглощения*.

В частности, в области прозрачности вещества, т. е. вдали от линии поглощения, когда $\epsilon'' \ll \epsilon'$ и можно положить $n \approx \sqrt{\epsilon'}$ и $n' \approx \epsilon''/(2\sqrt{\epsilon'})$, в однорезонансном приближении

$$n^2 \approx \epsilon' \approx 1 + \omega_\pi^2 / (\omega_c^2 - \omega^2). \quad (61.29)$$

Вспоминая, что $\omega_c^2 = \omega_0^2 - \omega_\pi^2/3$, и разрешая (61.29) относительно ω_π^2 , приходим к соотношению

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\omega_\pi^2}{3(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{4\pi N_c e^2 / (3m_e)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (61.30)$$

(формула Лоренца — Лоренца). Она была выведена независимо друг от друга в 1869 г. датчанином Л. В. Лоренцем, в 1873 г. — Дж. К. Максвеллом и в 1879 г. — Г. А. Лоренцем (результат

Максвелла остался при этом незамеченным). Согласно (61.30), при заданной частоте $(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ оказывается пропорциональным концентрации электронов. Очевидно, что формула Лоренца — Лоренца является обобщением (при $\omega \neq 0$) соотношения Клаузиуса — Мосотти (58.26).

Перейдем к рассмотрению второго типа плоских волн в среде — *продольных*. В этом случае $[\mathbf{kE}_0] = 0$, поэтому из уравнений (61.22) следует, что

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{D}_0 = \varepsilon \mathbf{E}_0 = 0, \quad (61.31)$$

т. е. эти волны чисто электрические и могут существовать только для тех частот ω_i , которые являются корнями уравнения

$$\varepsilon(\omega_i) = 0. \quad (61.32)$$

Если ω достаточно велико, то в пренебрежении потерями можно воспользоваться упрощенным выражением (61.21), из которого следует, что $\omega_i = \omega_n$. Таким образом, в соответствии с результатом задачи 61.1 продольные волны связаны с поляризационными колебаниями электронов в среде и поэтому часто называются *волнами поляризации* или *волнами Бора*, который впервые использовал их для расчета потерь энергии заряженной частицы, движущейся в среде.

Задача 61.2. Показать, что в области прозрачности средняя по времени плотность энергии периодического электромагнитного поля в среде имеет вид

$$\bar{w} = \frac{1}{16\pi} \left[|\mathbf{E}_\omega|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \varepsilon') + |\mathbf{B}_\omega|^2 \right]. \quad (61.33)$$

В реальных физических задачах часто приходится исследовать распространение в среде не только плоских электромагнитных волн, но и волновых пакетов. Волновой пакет в диспергирующей среде можно построить по аналогии с (39.11) и (39.13). Ограничившись поперечными волнами, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \text{Re} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega(\mathbf{k})t} d^3k, \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= c \text{Re} \iiint_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{kE}_0(\mathbf{k})] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega(\mathbf{k})t} \frac{d^3k}{\omega(\mathbf{k})}, \end{aligned} \quad (61.34)$$

где $d^3k = dk_x dk_y dk_z$, $(\mathbf{kE}_0) = 0$, $\omega(\mathbf{k})$ — решение дисперсионного уравнения (61.24).

Рассмотрим достаточно узкие волновые пакеты, т. е. примем, что функция $|\mathbf{E}_0(\mathbf{k})|$ имеет резко выраженный максимум в некоторой точке $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Для описания поведения такого волнового пакета удобно ввести понятие о его центре, который можно

считать совпадающим с радиусом-вектором

$$\xi(t) \equiv \int \mathbf{r} \tilde{E}^2 dV / \int \tilde{E}^2 dV, \quad (61.35)$$

где усреднение производится по периоду $T_0 = 2\pi / (ck_0)$.

Задача 61.3. Показать, что скорость центра волнового пакета совпадает с групповой скоростью, которая может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{v} = \xi(t) = \left. \frac{\partial \omega'}{\partial \mathbf{k}} \right|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}, \quad (61.36)$$

где $\omega' = \text{Re} \omega(\mathbf{k})$. Предполагается, что время t удовлетворяет неравенству $\text{Im} \omega'(\mathbf{k}_0) \ll 2\pi$; $\omega'' = \text{Im} \omega(\mathbf{k})$.

Таким образом, практически для любого времени вычислять групповую скорость по формуле (61.36) можно только в прозрачной области, в которой $\omega'' \ll \omega'$. В этом случае, дифференцируя по \mathbf{k} соотношение (61.24), находим

$$\mathbf{v} = \frac{2\mathbf{k}c^2}{(d/d\omega)(\omega^2 \epsilon')},$$

или

$$v = \frac{c}{(d/d\omega)(n\omega)} = \frac{v_\phi}{1 + [(\omega/n)(dn/d\omega)]}. \quad (61.37)$$

Отсюда видно, что в области *нормальной дисперсии*, когда $dn/d\omega > 0$, групповая скорость не превосходит фазовую, т. е. $v < v_\phi = c/n$. Однако в области *аномальной дисперсии*, когда $dn/d\omega < 0$, будет $v > v_\phi$, а так как при этом возможны значения $n < 1$, то групповая скорость может превосходить скорость света. Между тем, как видно, например, из рис. 61.2, область аномальной дисперсии совпадает с областью поглощения, в которой пользоваться формулой (61.36) нельзя и выводы из нее неправомочны.

Задача 61.4. Показать, что в области прозрачности групповая скорость совпадает со скоростью центра масс волнового пакета, т. е. является скоростью переноса энергии.

Помимо фазовой и групповой скоростей часто употребляются еще понятия скорости сигнала и скорости фронта сигнала. Под *сигналом* обычно понимается волновой пакет с резко ограниченными краями. Его передняя кромка называется *фронтом*. Можно показать, что *скорость фронта сигнала в любой среде равна скорости света в вакууме [теорема Т. Леви-Чивиты (1913)]*. Причину этого нетрудно понять, если заметить, что в области фронта поле испытывает резкие изменения, а это, в свою очередь, связано с присутствием в *фурье-разложении* поля бесконечно больших частот. Но, согласно (61.21), $\epsilon(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow 1$, поэтому среда ведет себя по отношению к таким изменениям поля как вакуум. Очевидно, что это связано с инертностью заряженных частиц.

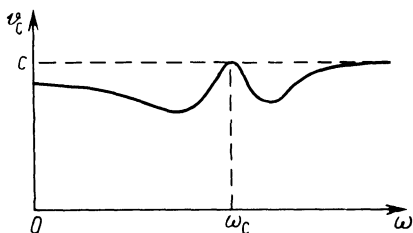


Рис. 61.3

звал их *первым и вторым предвестниками**. Как и следовало ожидать, скорости их не превышают c , а скорость основной группы, или *скорость сигнала*, отличается от групповой скорости v , вычисленной по формуле (61.36), только в области поглощения. Зависимость скорости сигнала от частоты схематически изображена на рис. 61.3 (на примере однорезонансной модели).

Интересное явление, связанное с влиянием вещества на электромагнитное поле, было обнаружено в 1934 г. советскими физиками *П. А. Черенковым* и *С. И. Вавиловым*. Они наблюдали узкий конус излучения, испускаемого быстрыми электронами в среде при условии, что их скорость $v = c\beta$ превышала фазовую скорость c/n света, т. е. при

$$\beta^2 \epsilon(\omega) > 1, \quad (61.38)$$

если рассматривать область прозрачности, где $\epsilon'' \ll \epsilon' \approx \epsilon$, $\mu = 1$. Угол ϑ , образуемый волновым вектором \mathbf{k} и скоростью электрона, определяется соотношением

$$\cos \vartheta = (n\beta)^{-1}, \quad (61.39)$$

из которого следует и условие (61.38). Излучение имело сплошной спектр, было поляризованным в плоскости \mathbf{k} , \mathbf{v} и более длинноволновым ближе к оси конуса. Последнее вытекает из (61.39), так как в области нормальной дисперсии $n^2 \beta \sin \vartheta d\vartheta/d\omega = dn/d\omega > 0$.

Теория излучения Вавилова — Черенкова была создана в 1937 г. советскими физиками *И. Е. Таммом* и *И. М. Франком*, хотя само явление предсказано и описано (правда, без учета дисперсии) еще в 1888 г. английским физиком *О. Хевисайдом*, впервые получившим формулу (61.39). Излучение оказалось ничем иным, как *электромагнитной ударной волной*, аналогом известного в акустике конуса Маха, сопровождающего всякий сверхзвуковой объект. Возникает ударный фронт в согласии с принципом Гюйгенса: волны возбуждения от движущегося электрона рас-

Структура фронта сигнала в диспергирующей среде была подробно изучена *А. Зоммерфельдом* и *Л. Бриллюэном* в 1914 г. Они обнаружили, что в среде с поглощением в промежутке между фронтом и основной группой можно выделить две области с заметно повышенной интенсивностью поля. Бриллюэн на-

* С некоторыми подробностями этих расчетов можно ознакомиться в кн.: *Рыбаков Ю. П. Электродинамика сплошных сред*. М., 1988.

пространяются в среде со скоростью $v_\phi = c/n$ и интерферируют, образуя конический фронт. В соответствии с этим на рис. 61.4 $OA = v_\phi t$, $OB = vt$, откуда $\cos \vartheta = v_\phi/v = (n\beta)^{-1}$ [см. (61.39)]. Интересно, что гипотетический случай заряда, движущегося со сверхсветовой скоростью в вакууме, был рассмотрен в 1904 г. немецким физиком *А. Зоммерфельдом* (см. задачу 46.3), рассчитавшим силу торможения, испытываемую таким зарядом вследствие излучения.

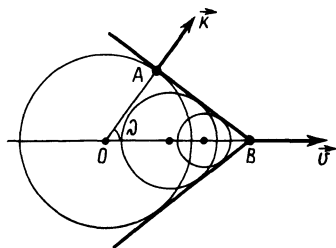


Рис. 61.4

Для количественного описания излучения Вавилова — Черенкова рассмотрим точечный заряд e , движущийся с постоянной скоростью $v = v_z$ в однородной изотропной среде с $\mu = 1$, $\epsilon = \epsilon(\omega)$, $\epsilon'' \rightarrow 0$. Принимая условие Лоренца в форме $c \operatorname{div} \mathbf{A} + \epsilon \partial \varphi / \partial t = 0$, приводим уравнения для потенциалов φ , \mathbf{A} к виду

$$\begin{aligned} \epsilon [\Delta \varphi - (\epsilon/c^2) \partial^2 \varphi / \partial t^2] &= -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \\ \Delta \mathbf{A} - (\epsilon/c^2) \partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 &= -(4\pi/c) e \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \end{aligned} \quad (61.40)$$

Задача 61.5. *Применив преобразование Фурье, показать, что запаздывающая функция Грина для оператора $\epsilon \Delta - (\epsilon/c)^2 \partial^2 / \partial t^2$ имеет вид*

$$G(T, \mathbf{R}) = (2\pi)^{-4} \iiint_{C-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{R}) - i\omega T]}{\epsilon(\omega)[k^2 - \epsilon(\omega)\omega^2/c^2]} d\omega d^3k, \quad (61.41)$$

где контур C в комплексной ω -плоскости асимптотически (при $\omega \rightarrow \pm \infty$) совпадает с вещественной осью и охватывает сверху все особенности подынтегрального выражения (61.41).

Зная функцию Грина, запишем скалярный потенциал в виде

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t', \mathbf{r}-\mathbf{v}t') dt', \quad (61.42)$$

тогда как $\mathbf{A} = \epsilon^{-1} \mathbf{v} \varphi / c$. Подставляя (61.41) в (61.42) и замечая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(k_3 v - \omega)t'] dt' = 2\pi \delta(k_3 v - \omega),$$

приводим (61.42) к виду

$$\varphi = \frac{e}{2\pi^2 v} \iiint_{C-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[i(k_1 x + k_2 y) + i(z-vt)\omega/v]}{\epsilon[k_1^2 + k_2^2 + (1-\epsilon\beta^2)\omega^2/v^2]} d\omega dk_1 dk_2. \quad (61.43)$$

Интегрирование по k_1, k_2 в (61.43) легко выполняется в полярных координатах k, α , если вспомнить определение функции Бесселя:

$$J_0(kr) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp(ikr \cos \alpha) d\alpha, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

и учесть преобразование Фурье—Бесселя для функции Макдональда:

$$K_0(\chi r) = \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)}{k^2 + \chi^2} k dk, \quad \operatorname{Re} \chi > 0.$$

Тогда для потенциалов $\varphi, A = A_z$ имеем представление

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ A \end{pmatrix} = \int_c \begin{pmatrix} \Phi \\ a \end{pmatrix} \exp[i(z - vt)\omega/v] d\omega, \quad (61.44)$$

где $a(\omega, r) = \varepsilon\beta\Phi(\omega, r) = e(\pi c)^{-1} K_0(\chi r)$, $\chi = \pm(1 - \varepsilon\beta^2)^{1/2} \omega/v$, а знак χ выбирается из условия $\operatorname{Re} \chi > 0$. В частности, в области (61.38) имеем $\chi = -i(\varepsilon\beta^2 - 1)^{1/2} \omega/v$, так как, согласно (61.14), $\omega\varepsilon''(\omega) > 0$. При этом на больших расстояниях от заряда, когда $\chi r \gg 1$ и $K_0(\chi r) \approx \exp(-\chi r) [\pi/(2\chi r)]^{1/2}$, имеем

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ A \end{pmatrix} = \frac{e}{v} \int_c \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \\ \beta \end{pmatrix} (2\pi\chi r)^{-1/2} \exp[-\chi r + i(z - vt)\omega/v] d\omega. \quad (61.45)$$

Из структуры фазы поля (61.45) в области (61.38) выводим

$$k_r = (\varepsilon\beta^2 - 1)^{1/2} \omega/v, \quad k_z = \omega/v, \quad \cos \vartheta = k_z (k_r^2 + k_z^2)^{-1/2} = (n\beta)^{-1},$$

т. е. вновь получаем выражение (61.39) для угла наклона фронта волны.

В заключение подсчитаем потери энергии зарядом в среде при прохождении 1 см пути, т. е. $dW/dz = v^{-1} dW/dt$. На практике обычно вычисляют потери энергии на излучение и на поляризацию среды вне некоторого цилиндра радиуса r , осью которого служит траектория заряда. Эта величина равна потоку вектора Пойнтинга сквозь боковую поверхность цилиндра:

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_r = v^{-1} \oint (\mathbf{nS}) dS = \frac{cr}{2v} \int_{-\infty}^{+\infty} H_x E_z dz. \quad (61.46)$$

Задача 61.6. Используя представление (61.44) для поля заряда, движущегося в среде, получить из (61.46) формулу Ферми (1940) для полных потерь энергии зарядом вне цилиндра радиуса r :

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_r = \frac{ie^2 r}{\pi v^2} \int_c (\varepsilon^{-1} - \beta^2) \chi^* K_1(\chi^* r) K_0(\chi r) \omega d\omega. \quad (61.47)$$

Если нас интересуют потери энергии только на излучение Вавилова—Черенкова, то достаточно положить в (61.47) $r \rightarrow \infty$, поскольку потери на поляризацию среды [при этом берется область, дополнительная к (61.38)] экспоненциально затухают, как это видно из (61.45)*. В результате нетрудно получить известную формулу Тамма—Франка (1937):

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{в. - ч}} = \frac{e^2}{v^2} \int_{\substack{(\varepsilon\beta^2 > 1) \\ (\omega > 0)}} (\beta^2 - \varepsilon^{-1}) \omega d\omega.$$

* Более подробный анализ потерь с учетом поглощения см. в кн.: Рыбаков Ю. П. Электродинамика сплошных сред М., 1988.