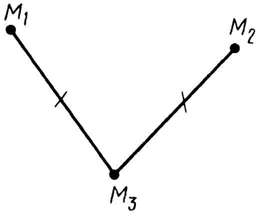

Рис. 66.1

Иначе говоря, часы C_2 должны быть установлены так, чтобы в момент прихода сигнала в точку M_2 их показание было t_2 [в соответствии с (66.1)]. Такого рода световая синхронизация часов и была положена Эйнштейном в основу *определения одновременности пространственно разобщенных событий.*

Очевидно, что возможны и другие способы синхронизации часов. Например, световой сигнал может высылаться в точки M_1 и M_2 из некоторой равноудаленной от них точки M_3 (рис. 66.1). Тогда время, показываемое часами C_1 и C_2 в момент прихода сигнала, должно быть одинаковым*.

§ 67. ВЫВОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА—ЭЙНШТЕЙНА

При выводе преобразований Лоренца будем считать принятыми следующие положения:

1) *однородность пространства и времени*, означающая, что вид преобразований не должен зависеть от выбора начала отсчета пространственных координат или времени;

2) *изотропность пространства*, т. е. равноправие всех пространственных направлений;

3) *принцип относительности*, т. е. полное равноправие всех инерциальных систем отсчета;

4) *постулат постоянства скорости света*, т. е. одинаковость скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета Σ и Σ', с которыми свяжем декартовы системы координат. Систему отсчета Σ условно назовем неподвижной, а систему Σ' (также условно) — движущейся в системе Σ со скоростью $\mathbf{v}$. Если рассматривать пространственно-временно́е описание некоторого материального процесса в системах Σ и Σ', то эти описания должны быть эквивалентными, т. е. связанными между собой. Иначе говоря, в различных системах отсчета лишь по-разному изображается один и тот же пространственно-временной континуум, свойства которого являются отражением свойств материи. Поэтому должны существовать формулы преобразования от одной системы отсчета к другой, которые мы сначала запишем в самом общем виде:

$$t' = \varphi(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{r}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}), \tag{67.1}$$

где φ и $\mathbf{f}$ — некоторые неизвестные функции. Для определения их конкретного вида воспользуемся сформулированными выше четырьмя требованиями.

---

* Нетрудно убедиться, что подобную синхронизацию часов можно осуществить и с помощью частиц равной массы, выбрасываемых из точки M_3, если только обеспечить равенство их импульсов.

1. Если рассмотреть два различных события $(t_1, \mathbf{r}_1)$ и $(t_2, \mathbf{r}_2)$, то разности $t'_2 - t'_1$ и $\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1$ могут зависеть только от $t_2 - t_1$ и $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, как того требует принцип однородности пространства-времени. Таким образом,

$$\begin{gathered}\varphi(t_2, \mathbf{r}_2) - \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) = \Phi(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1); \\ \mathbf{f}(t_2, \mathbf{r}_2) - \mathbf{f}(t_1, \mathbf{r}_1) = \mathbf{F}(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),\end{gathered} \tag{67.2}$$

где Φ и $\mathbf{F}$ — некоторые новые функции. Принимая, что в момент $t=0$ начала отсчета в системах Σ и Σ' совпадают, имеем $\varphi(0, 0)=0$, $\mathbf{f}(0, 0)=0$. Поэтому, полагая в (67.2) $t_1=0$, $\mathbf{r}_1=0$, находим:

$$\varphi(t_2, \mathbf{r}_2) = \Phi(t_2, \mathbf{r}_2); \quad \mathbf{f}(t_2, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(t_2, \mathbf{r}_2).$$

Тогда уравнения (67.2) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}\varphi(t_2, \mathbf{r}_2) - \varphi(t_1, \mathbf{r}_1) = \varphi(t_2, -t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1); \\ \mathbf{f}(t_2, \mathbf{r}_2) - \mathbf{f}(t_1, \mathbf{r}_1) = \mathbf{f}(t_2 - t_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),\end{gathered} \tag{67.3}$$

из которого следует, что функция φ и $\mathbf{f}$ линейны по t и $\mathbf{r}$.

2. Будем теперь считать оси координат в системах Σ и Σ' параллельными и совпадающими в момент времени $t=0$. Тогда вследствие изотропности пространства единственным выделенным направлением будет направление скорости $\mathbf{v}$. Иначе говоря, единственным вектором, от которого параметрически могут зависеть функции преобразования φ и $\mathbf{f}$ в (67.1), является вектор скорости $\mathbf{v}$. Ориентируя ось X вдоль $\mathbf{v}$ и учитывая линейность функций φ, $\mathbf{f}$, а также совпадение плоскостей $x'=0$ и $x=vt$, заметим, что из параллельности осей координат в системах Σ и Σ' следует пропорциональность x', y', z' и соответственно $x-vt$, y, z. При этом коэффициенты пропорциональности в y' и z' одинаковы вследствие равноправия осей Y и Z. Наконец, t' может зависеть лишь от t и x вследствие выделенности направления X. Учитывая все сказанное, запишем преобразование (67.1) в виде

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = \alpha y, \quad z' = \alpha z, \quad t' = \mu(t - vx/\eta), \tag{67.4}$$

где коэффициенты α, γ, μ, η могут зависеть лишь от v^2, поскольку при изменении направления осей X и X' на обратное и одновременном обращении знака скорости v преобразование (67.4) не должно меняться, как это следует из изотропности пространства.

Нетрудно понять, что эти рассуждения эквивалентны утверждению, что $\mathbf{r}'$ — полярный вектор, а t' — скаляр, линейно зависящие от t и $\mathbf{r}$. В самом деле, $\mathbf{r}'$ может быть только линейной комбинацией векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{v})$ и $\mathbf{v}t$, а t' — комбинацией скаляров t и $(\mathbf{v}\mathbf{r})$:

$$\mathbf{r}' = \alpha\mathbf{r} + \beta\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{v}) - \gamma\mathbf{v}t, \quad t' = \mu t + \varepsilon(\mathbf{r}\mathbf{v}), \tag{67.5}$$

где α, β, γ, μ, ε, как скаляры, могут зависеть лишь от v^2. Далее, поскольку в системе Σ система Σ' движется со скоростью $\mathbf{v}$, то $\mathbf{r}'=0$ эквивалентно $\mathbf{r}=\mathbf{v}t$. Но тогда из (67.5) следует, что $\alpha+\beta v^2-\gamma=0$, и (67.5) принимает вид

$$\mathbf{r}' = \alpha\mathbf{r} + (\gamma - \alpha)\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{v})/v^2 - \gamma\mathbf{v}t, \quad t' = \mu t + \varepsilon(\mathbf{r}\mathbf{v}), \tag{67.6}$$

что эквивалентно (67.4), если считать ось X параллельной $\mathbf{v}$.

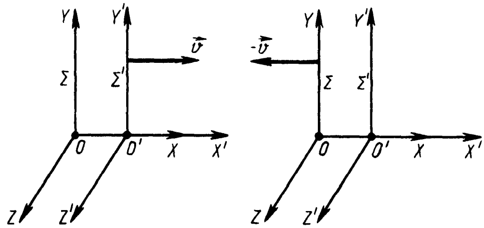

Рис. 67.1

3. Воспользуемся принципом относительности и рассмотрим обратный переход — от системы Σ' к системе Σ. Вследствие равноправия систем отсчета Σ и Σ' этот переход описывается теми же формулами (67.4), но с заменой v на $-v$ (рис. 67.1):

$$x=\gamma(x'+vt'),\quad y=\alpha y',\quad z=\alpha z',\quad t=\mu(t'+vx'/\eta). \tag{67.7}$$

Подставляя (67.4) в (67.7), находим:

$$x=\gamma\left[\gamma(x-vt)+v\mu t-\mu v^2x/\eta\right],\quad y=\alpha^2 y,$$
$$z=\alpha^2 z,\quad t=\mu^2 t-\mu^2 vx/\eta+\mu v\gamma(x-vt)/\eta.$$

Так как полученные соотношения должны выполняться тождественно, то функции α, γ, μ, η оказываются связанными между собой:

$$\alpha^2=1,\quad \gamma(\gamma-\mu v^2/\eta)=1,\quad \gamma v(\mu-\gamma)=0,$$
$$\mu^2-\mu\gamma v^2/\eta=1,\quad v\mu(\mu-\gamma)/\eta=0.$$

Отсюда сразу находим, что $\alpha=\pm 1$. Однако случай $\alpha=-1$ соответствует преобразованию $y'=-y$, $z'=-z$; мы же предполагали направления осей координат в Σ и Σ' одинаковыми. Поэтому остается единственный выбор

$$\alpha=1. \tag{67.8}$$

Далее, поскольку $v\neq 0$ и $\gamma\neq 0$ (иначе $x'\equiv 0$), то

$$\mu=\gamma,\quad \gamma^2=(1-v^2/\eta)^{-1}. \tag{67.9}$$

В результате преобразование (67.4) принимает вид

$$x'=\gamma(x-vt),\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\gamma(t-vx/\eta), \tag{67.10}$$

где $\gamma^2=(1-v^2/\eta)^{-1}$.

Итак, нам осталось определить только одну неизвестную функцию $\eta(v^2)$. Для этого воспользуемся еще раз принципом относительности и рассмотрим новую инерциальную систему отсчета Σ'', движущуюся относительно Σ' вдоль оси X' со скоростью v'. По принципу относительности преобразование от системы Σ к системе Σ'' также должно иметь вид (67.10) с некоторой новой скоростью $\bar{v}$ и новыми значениями $\bar{\gamma}\equiv\gamma(\bar{v}^2)$, $\bar{\eta}\equiv\eta(\bar{v}^2)$:

$$x''=\bar{\gamma}(x-\bar{v}t), \quad y''=y, \quad z''=z, \quad t''=\bar{\gamma}(t-\bar{v}x/\bar{\eta}). \tag{67.11}$$

Однако то же самое преобразование можно получить, совершив сначала переход от Σ к Σ', а затем от Σ' к Σ''*. При этом

$$\begin{aligned} x''&=\gamma\gamma'\left[x-vt-v'(t-vx/\eta)\right], \\ t''&=\gamma\gamma'\left[t-(vx/\eta)-v'(x-vt)/\eta'\right]. \end{aligned} \tag{67.12}$$

Сравнив (67.11) и (67.12) и, в частности, коэффициенты при x в выражении для x'' и коэффициенты при t в выражении для t'', найдем

$$\bar{\gamma}=\gamma\gamma'(1+vv'/\eta), \quad \bar{\gamma}=\gamma\gamma'(1+vv'/\eta').$$

Отсюда следует, что

$$\eta'=\eta=\text{const}, \tag{67.13}$$

т. е. η не зависит от v. Таким образом, согласно (67.9) и (67.13), γ есть функция v^2 и фундаментальной постоянной η:

$$\gamma=\pm(1-v^2/\eta)^{-1/2}.$$

Однако решение, отвечающее отрицательным γ, следует отбросить, так как при $v=0$ должно получаться тождественное преобразование, т. е. $\gamma(0)=1$. Окончательно

$$\gamma=(1-v^2/\eta)^{-1/2}. \tag{67.14}$$

4. Для определения постоянной η воспользуемся постулатом постоянства скорости света. Рассмотрим плоскую световую волну, распространяющуюся вдоль оси X. Уравнение волнового фронта этой волны в системе отсчета Σ имеет вид

$$x-ct=0. \tag{67.15}$$

Однако в системе Σ', согласно постулату о постоянстве скорости света, уравнение волнового фронта должно выглядеть точно так же:

$$x'-ct'=0. \tag{67.16}$$

Преобразуя левую часть (67.16) с помощью (67.10) и учитывая (67.15), находим

$$\gamma vt(1-c^2/\eta)=0.$$

Так как $v\neq 0$ и $\gamma\neq 0$, то

$$\eta=c^2. \tag{67.17}$$

В итоге преобразования Лоренца, выведенные на основании постулатов Эйнштейна, принимают вид

---

* Это является выражением *группового* характера разыскиваемых преобразований.

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{67.18}$$

Обратные преобразования получаются заменой v на $-v$:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{67.19}$$

С помощью (67.6) нетрудно получить преобразования Лоренца и в общем случае, когда скорость $\mathbf{v}$ имеет произвольное направление. Тогда в векторной записи имеем

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\gamma\mathbf{v}t+(\gamma-1)(\mathbf{rv})\mathbf{v}/v^2,\quad t'=\gamma\left[t-(\mathbf{rv})/c^2\right], \tag{67.20}$$

где $\gamma=\left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}$.

Итак, нами получены преобразования координат и времени, осуществляющие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. В этих преобразованиях в концентрированной форме и содержатся новые представления о пространстве и времени, вытекающие из принципа относительности, распространенного на все физические явления, включая электродинамические.

Задача 67.1. *Убедиться в инвариантности оператора Даламбера $\Box$ относительно преобразований Лоренца [установить на основании этого ковариантность волнового уравнения $\Box\psi=0$ и уравнения Клейна — Гордона $(\Box-m^2)\psi=0$ $(m=\text{const})$ для скалярного поля ψ]. Показать, что уравнения механики Ньютона нековариантны относительно преобразований Лоренца.*

§ 68. ОБЩИЕ СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Рассмотрим некоторые следствия преобразований Лоренца, выявляющие то новое, что они вносят в представления о пространстве и времени.

Предельный случай медленных движений $(v\ll c)$. В механике макроскопических тел, имеющей дело со скоростями, гораздо меньшими скорости света, хорошо подтверждается принцип относительности, основанный на преобразованиях Галилея. Поэтому в пределе медленных движений преобразования Лоренца должны сводиться к преобразованиям Галилея. Однако если считать $v/c\to 0$, т. е. $\gamma\to 1$, то преобразования (67.18) принимают вид

$$x'=x-vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t-vx/c^2. \tag{68.1}$$

Как видно, они отличаются от преобразований Галилея тем, что вместо абсолютного времени $t'=t$ вводится местное время Лоренца $t'=t^{\text{мест}}=t-vx/c^2$. Однако для реальных физических задач пространственные координаты можно считать ограниченными. Поэтому, исключая бесконечно удаленные точки, т. е. полагая $vx\ll c^2t$, убеждаемся, что преобразования (68.1) в самом деле переходят в преобразования Галилея.

Таким образом, новая теория пространства-времени, основанная на преобразованиях Лоренца, удовлетворяет принципу соответствия,