$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (67.18)$$

Обратные преобразования получаются заменой v на $-v$:

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \qquad (67.19)$$

С помощью (67.6) нетрудно получить преобразования Лоренца и в общем случае, когда скорость $\mathbf{v}$ имеет произвольное направление. Тогда в векторной записи имеем

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\gamma\mathbf{v}t+(\gamma-1)(\mathbf{rv})\mathbf{v}/v^2,\quad t'=\gamma\left[t-(\mathbf{rv})/c^2\right], \qquad (67.20)$$

где $\gamma=\left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}$.

Итак, нами получены преобразования координат и времени, осуществляющие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. В этих преобразованиях в концентрированной форме и содержатся новые представления о пространстве и времени, вытекающие из принципа относительности, распространенного на все физические явления, включая электродинамические.

Задача 67.1. *Убедиться в инвариантности оператора Даламбера $\Box$ относительно преобразований Лоренца [установить на основании этого ковариантность волнового уравнения $\Box\psi=0$ и уравнения Клейна—Гордона $(\Box-m^2)\psi=0$ ($m=\mathrm{const}$) для скалярного поля ψ]. Показать, что уравнения механики Ньютона нековариантны относительно преобразований Лоренца.*

§ 68. ОБЩИЕ СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Рассмотрим некоторые следствия преобразований Лоренца, выявляющие то новое, что они вносят в представления о пространстве и времени.

Предельный случай медленных движений $(v\ll c)$. В механике макроскопических тел, имеющей дело со скоростями, гораздо меньшими скорости света, хорошо подтверждается принцип относительности, основанный на преобразованиях Галилея. Поэтому в пределе медленных движений преобразования Лоренца должны сводиться к преобразованиям Галилея. Однако если считать $v/c\to 0$, т. е. $\gamma\to 1$, то преобразования (67.18) принимают вид

$$x'=x-vt,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t-vx/c^2. \qquad (68.1)$$

Как видно, они отличаются от преобразований Галилея тем, что вместо абсолютного времени $t'=t$ вводится местное время Лоренца $t'=t^{\text{мест}}=t-vx/c^2$. Однако для реальных физических задач пространственные координаты можно считать ограниченными. Поэтому, исключая бесконечно удаленные точки, т. е. полагая $vx\ll c^2t$, убеждаемся, что преобразования (68.1) в самом деле переходят в преобразования Галилея.

Таким образом, новая теория пространства-времени, основанная на преобразованиях Лоренца, удовлетворяет принципу соответствия, переходя в пределе медленных движений в старую теорию Ньютона — Галилея. Выполнение принципа соответствия является необходимым условием, предъявляемым ко всякой новой теории, поскольку старая, хорошо проверенная теория обязательно должна содержаться в новой в качестве предельного случая, т. е. при изменении входящих в теорию параметров в некоторой ограниченной области.

Преобразования Лоренца теряют физический смысл при $v>c$. В самом деле, в этом случае $\gamma=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ становится мнимой величиной, а вместе с ней мнимыми оказываются и новые координаты x' и время t'. Но результаты любых измерений пространства и времени выражаются в действительных числах, поэтому физический смысл имеют лишь действительные координаты и время. Следовательно, системы отсчета, движущиеся со скоростью, превышающей скорость света в вакууме, не имеют физического смысла и должны быть изъяты из рассмотрения. Вместе с тем преобразования, осуществляющие переход к таким системам и рассматриваемые формально математически, безусловно могут оказаться полезными при решении некоторых задач.

Задача 68.1. *Рассмотреть комплексное преобразование Лоренца вида*

$$x'=\tilde{\gamma}(x-vt),\qquad y'=iy,\qquad z'=iz,\qquad t'=\tilde{\gamma}(t-vx/c^2),$$

где $\tilde{\gamma}=[(v^2/c^2)-1]^{-1/2}$, $v>c$, *и убедиться, что относительно этого преобразования остается инвариантным уравнение Даламбера, но не уравнение Клейна — Гордона*.*

Относительность одновременности. Ранее, анализируя распространение световой волны в двух инерциальных системах отсчета Σ и Σ', находящихся в относительном движении, мы пришли к выводу, что постулаты Эйнштейна непротиворечивы только при допущении *относительности одновременности пространственно-разобщенных событий.* Убедимся теперь в этом с помощью преобразований Лоренца. При этом для упрощения картины вообще не будем рассматривать координаты y и z.

Пусть в неподвижной системе отсчета Σ зафиксированы два пространственно-разобщенных события (t_1, x_1) и (t_2, x_2), $x_2\neq x_1$. Посмотрим, как будут выглядеть эти события в системе Σ', движущейся со скоростью v. Применяя преобразования Лоренца, имеем

$$\begin{aligned} x_2'-x_1'&=\gamma\left[(x_2-x_1)-v(t_2-t_1)\right],\\ t_2'-t_1'&=\gamma\left[(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)\right]. \end{aligned}\qquad(68.2)$$

Допустим, что в системе Σ события одновременны, т. е.

$$t_2=t_1.\qquad(68.3)$$

* О более общих преобразованиях, оставляющих инвариантным волновое уравнение, см. в кн.: *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн. М., 1958. § 13, 51. В связи с преобразованием в задаче **68.1** см. кн.: «Tachyons, Monopoles, and Related Topics» ed by *E Recami*, Amsterdam, 1978.

Тогда в системе Σ', согласно (68.2), справедливы соотношения

$$t_2'-t_1'=-(x_2-x_1)v\gamma/c^2, \quad x_2'-x_1'=\gamma(x_2-x_1), \tag{68.4}$$

откуда

$$t_2'-t_1'=-(x_2'-x_1')v/c^2\neq 0. \tag{68.5}$$

Таким образом, события, одновременные в системе Σ, становятся неодновременными в системе Σ', т. е. *одновременность пространственно разобщенных событий относительна**. Это обстоятельство является тем существенно новым, что вносится преобразованиями Лоренца в наши представления о пространстве-времени.

В самом деле, в классической механике Ньютона, основанной на принципе относительности Галилея, время считалось абсолютным и признавалась лишь пространственная относительность, т. е. относительность одноместности событий, разделенных во времени. Так, если в системе Σ события (t_1, x_1) и (t_2, x_2) происходят в одной точке $(x_1=x_2)$ и в разные моменты времени $(t_1\neq t_2)$, то в системе Σ', согласно преобразованиям Галилея, они будут разделены отрезком $x_2'-x_1'=v(t_1-t_2)\neq 0$. Что же касается одновременности событий, то она считалась абсолютной: $t_2'-t_1'=t_2-t_1$.

Чтобы нагляднее представить себе относительность одновременности, рассмотрим ее проявление на конкретной модели. Допустим, что в системе Σ' одновременно вспыхнули расставленные вдоль оси X' лампочки. Тогда в системе Σ вспышки не будут одновременными и лампочки зажигаются последовательно одна за другой, причем фронт вспышек, согласно (68.2), перемещается со скоростью

$$u=(x_2-x_1)/(t_2-t_1)=c^2/v.$$

Эта скорость связана с относительной скоростью v систем Σ и Σ' соотношением

$$uv=c^2, \tag{68.6}$$

использованным в свое время Луи де Бройлем для описания «волн материи». Де Бройль предположил, что со всякой неподвижной частицей массы m_0 связан некоторый периодический процесс частоты $\omega_0=m_0c^2/\hbar$, где $2\pi\hbar\equiv h$ — постоянная Планка. Иначе говоря, он постулировал существование волнового поля

$$\psi(t, x)=\psi_0 e^{-i\omega_0 t},$$

изменяющегося по гармоническому закону одновременно во всех точках пространства. Если же частица движется со скоростью v,

---

* Время $t_2'-t_1'$ можно назвать, по предложению О. С. Иваницкой, временем десинхронизации, так как события, синхронизированные в одной системе отсчета, десинхронизируются в другой. Это время является количественным выражением относительности одновременности. Отметим, что эффект десинхронизации имеет первый порядок по v/c и вытекает уже из приближенных преобразований (68.1).

то, считая поле ψ скалярным, найдем, что в системе Σ', связанной с частицей, поле де Бройля имеет вид

Рис. 68.1

$$\psi'(t', x') = \psi_0 e^{-i\omega_0 t'},$$

а в системе Σ, согласно преобразованиям Лоренца,

$$\psi(t, x) = \psi'(t', x') = \psi_0 e^{-i\omega(t - x/u)},$$

где $u = c^2/v$, $\omega = \omega_0\gamma$, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Таким образом, с каждой движущейся со скоростью v частицей связано поле де Бройля в виде плоской волны, распространяющейся в пространстве с фазовой скоростью u, определяемой соотношением (68.6).

Ограниченность скорости распространения сигнала. Формулы (68.2) позволяют также сделать вывод о том, что *скорость любого сигнала, т. е. возмущения, переносящего информацию, не может превышать скорость света с*. В самом деле, пусть сигнал, посылаемый из точки x_1 в момент времени t_1, принимается в точке x_2 в момент времени t_2 (рис. 68.1). Очевидно, что момент испускания сигнала предшествует моменту его приема, т. е. $t_1 < t_2$, а скорость распространения сигнала равна

$$v_c = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1). \tag{68.7}$$

В то же время в движущейся системе отсчета Σ' [см. (68.2) и (68.7)]

$$t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)\gamma(1 - vv_c/c^2). \tag{68.8}$$

Так как для всех реальных систем отсчета $v < c$, то при $v_c < c$ всегда $vv_c < c^2$ и поэтому из (68.8) $t_1' < t_2'$, т. е. последовательность моментов испускания сигнала и его приема сохраняется неизменной во всех реальных инерциальных системах отсчета.

Однако если $v_c > c$, то найдутся системы отсчета, удовлетворяющие условию

$$\frac{c}{v_c} < \frac{v}{c} < 1,$$

для которых $vv_c > c^2$, поэтому $t_2' < t_1'$. Но такое изменение последовательности моментов испускания и поглощения сигнала в зависимости от выбора системы отсчета (всегда произвольного) несовместимо с *принципом причинности*, по крайней мере в той форме, в какой он выполняется для всех *макроскопических процессов*. Согласно этому принципу, всякая информация сначала посылается (причина), а затем принимается (следствие), менять причины и следствия местами невозможно.

Итак, принимая принцип причинности, мы вынуждены признать, что *скорость передачи информации не может превышать скорость света с*. Однако этот вывод не следует переносить на все без исключения физические процессы, поскольку не все процессы можно превратить в сигналы, т. е. использовать для передачи информации. Примером таких процессов могут быть, скажем, волны де Бройля, распространяющиеся с фазовой скоростью, превышающей скорость света. Это связано с тем, что бесконечная монохроматическая волна не несет никакой информации и поэтому не может быть сигналом. Передать информацию можно лишь с помощью группы волн, центр которой распространяется с *групповой скоростью* (61.36). В частности, для волн де Бройля, как можно показать, групповая скорость совпадает со скоростью v частицы, ассоциируемой с этой волной, и связана с фазовой скоростью u волны соотношением (68.6). При этом $u>c$, так как $v<c$ и предполагается, что с частицей всегда можно связать систему отсчета.

Допустимо существование и реальных частиц, движущихся со скоростью, большей скорости света, если отказаться от обычно подразумеваемой независимости процессов их испускания и поглощения. Для обычных, *досветовых*, частиц ($u<c$) процесс испускания (эмиссии) во всех возможных системах отсчета предшествует процессу поглощения (абсорбции). Для *сверхсветовых* же частиц ($u>c$) последовательность процессов эмиссии и абсорбции зависит от выбора системы отсчета [см. (68.8)], т. е. произвольна. Таким образом, если допустить, что сверхсветовая частица, испущенная в точке x_1 эмиттером E, поглощается в точке x_2 регистрирующим прибором — абсорбером A, то в некоторой другой возможной системе отсчета процесс абсорбции в точке x_2' предшествует процессу эмиссии в точке x_1'. Тем самым нарушается макроскопическая причинность, так как следствие (регистрация частицы) предшествует причине (испусканию частицы). Если же для сверхсветовых частиц не противопоставлять процессы поглощения и испускания, а рассматривать их как единый процесс эмиссии — абсорбции, или абсорбции — эмиссии, т. е. не считать возможной регистрацию лишь одного процесса поглощения частицы, а полагать осуществимой только регистрацию всего процесса сразу в обеих точках x_1 и x_2, то противоречия с принципом причинности не возникнет.

Таким образом, теории относительности не противоречит допущение о существовании точечных объектов, движущихся со сверхсветовой скоростью, испускаемых и поглощаемых обычными частицами в различных пространственных точках. Однако последовательность процессов эмиссии и абсорбции для этих объектов относительна, т. е. зависит от выбора системы отсчета. Такие гипотетические сверхсветовые частицы (*тахионы*) представляются в одной системе отсчета движущимися от точки x_1 к точке x_2, а в другой — от x_2 к x_1. Подробнее о свойствах тахионов будет сказано в § 96.

Помимо эффекта десинхронизации имеется еще два кинематических эффекта теории относительности (уже второго порядка), наиболее поражающие воображение: это эффекты сокращения движущихся масштабов и замедления хода движущихся часов.

§ 69. ИЗМЕНЕНИЕ ДЛИНЫ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Пусть некоторое тело движется относительно неподвижной системы отсчета Σ со скоростью v. Свяжем с ним подвижную систему отсчета Σ' и допустим, что сравнением с эталонными масштабами, установленными в той же системе, найдено, что длина тела равна l_0*. Под длиной же движущегося тела следует, очевидно, понимать

---

* Длину l_0 обычно называют *собственной длиной* тела.