дившихся на реактивном самолете, облетевшем вокруг Земли, и таких же часов, остававшихся на Земле*.

§ 72. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Пространство и время всегда выступают неизменными спутниками при описании физических процессов. Поэтому мысль об их объединении в единое четырехмерное многообразие возникла довольно давно. Еще в 1764 г. *Ж. А. Даламбер* писал об этом в своей статье «Размерность» во французской энциклопедии. Однако геометрическое описание такого многообразия во времена Даламбера выглядело бы очень искусственно, так как при своем физическом обосновании оно могло опираться только на классическую механику и лежащий в ее основе принцип относительности Галилея. Замечая, что относительно преобразований Галилея остаются инвариантными как расстояние между двумя точками $R=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$, так и промежуток времени между двумя событиями $T=t_2-t_1$, в качестве «расстояния» между двумя пространственно-временны́ми точками $(t_1, \mathbf{r}_1)$ и $(t_2, \mathbf{r}_2)$ можно было бы взять некоторую положительную функцию R и T. В частности, выбор «расстояния» в виде

$$s^{\text{евкл}}=\left(R^2+\alpha^2T^2\right)^{1/2}, \tag{72.1}$$

где α — некоторая постоянная с размерностью скорости, отвечал бы *эвклидову* варианту геометрии пространства-времени. Физический смысл постоянной α в этой схеме остается неясным, что и подтверждает ее искусственность.

Совершенно в ином свете предстает эта проблема, если привлечь принцип относительности Эйнштейна. Оказывается, что, хотя величины R и T изменяются при преобразованиях Лоренца, из них единственным образом строится инвариантная квадратичная форма

$$s^2=c^2T^2-R^2=c^2\left(t_2-t_1\right)^2-|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2. \tag{72.2}$$

Задача 72.1. *Убедиться в инвариантности квадратичной формы* (72.2) *при преобразованиях Лоренца.*

Опираясь на этот факт, известный геометр *Г. Минковский* построил новую геометрию пространства-времени. Так, в своей статье 1907 г. и в выступлении 1908 г. в Кельне на собрании немецких естествоиспытателей и врачей**, он предложил в качестве «расстояния» между двумя пространственно-временны́ми точками взять величину

$$s=\left[c^2\left(t_2-t_1\right)^2-|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^2\right]^{1/2}, \tag{72.3}$$

---

* *Hafele J. C., Keating R. E.* Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains — Science, 1972, v. **177**, № 4044, p. 168.

** См.: *Минковский Г.* Пространство и время.— В сб.: Принцип относительности. М., 1973. С. 167.

получившую название *интервала*. Так как фундаментальная форма (72.2) является знакопеременной, то геометрия Минковского существенно отличается от четырехмерной эвклидовой геометрии и, чтобы отметить это различие, часто называется *псевдоэвклидовой*.

По терминологии Минковского, пространственно-временно́е многообразие, т. е. совокупность всех возможных значений x, y, z, t, называется *миром*, а отдельное событие, происходящее в пространственной точке x, y, z в момент времени t, — *мировой точкой*. Множество мировых точек, изображающее движение отдельной материальной точки, называется *мировой линией* этой точки.

В геометрии Минковского интервал s, связывающий два события, т. е. две мировые точки, может быть действительной или мнимой величиной в зависимости от знака квадратичной формы (72.2). В связи с этим выделим следующие качественно различные интервалы:

1) *времениподобный* $(s^2>0)$;
2) *пространственноподобный* $(s^2<0)$;
3) *нулевой* $(s^2=0)$.

Происхождение этих названий связано с тем, что вследствие инвариантности интервала при преобразованиях Лоренца существует такая система отсчета, в которой при $s^2>0$ оказывается $R=0$ и $s=cT$, т. е. длина интервала измеряется при помощи часов. Аналогично, при $s^2<0$ существует такая система отсчета, в которой $T=0$, но $R\neq 0$, т. е. длина интервала измеряется масштабной линейкой.

События, разделенные пространственноподобным интервалом, очевидно, не могут быть связаны причинно. В самом деле, если в некоторой системе отсчета $T=0$, но $R\neq 0$, то сигнал, связывающий эти два события, должен был бы распространяться с бесконечной скоростью, что невозможно (см. § 68).

Если события разделены времениподобным интервалом, то они могут быть связаны причинно. Это позволяет ввести порядок следования событий, остающийся неизменным в любой системе отсчета, несмотря на относительность одновременности.

Выясним теперь, что представляют собой в геометрии Минковского преобразования Лоренца. Вводя обозначения

$$x^0=ct,\quad x^1=x,\quad x^2=y,\quad x^3=z \tag{72.4}$$

и полагая

$$v/c\equiv\beta=\operatorname{th}\psi, \tag{72.5}$$

запишем преобразования Лоренца, отвечающие движению системы отсчета вдоль оси X^1, в виде

$$x'^0=x^0\operatorname{ch}\psi-x^1\operatorname{sh}\psi,\ x'^1=-x^0\operatorname{sh}\psi+x^1\operatorname{ch}\psi,\ x'^2=x^2,\ x'^3=x^3, \tag{72.6}$$

где, очевидно,

$$\operatorname{ch}\psi=\gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2},\quad \operatorname{sh}\psi=\beta\gamma. \tag{72.7}$$

Не рассматривая для простоты координаты x^2 и x^3, изобразим преобразование (72.6) на обычной декартовой плоскости X^0, X^1. Плоскость X^0, X^1, на которой расстояние между двумя точками измеряется интервалом, называется *плоскостью Минковского*. Очевидно, преобразования (72.6) представляют собой переход от прямоугольной системы координат к косоугольной с дополнительным растяжением. Так как при таком переходе каждая точка плоскости занимает некоторое положение на соответствующей ей гиперболе

$$\left(x^0\right)^2-\left(x^1\right)^2=\mathrm{const}, \tag{72.8}$$

то преобразования (72.6) иногда называют *гиперболическим поворотом*. Так как $\operatorname{ch}\psi=\cos i\psi$ и $\operatorname{sh}\psi=-i\sin i\psi$, то гиперболический поворот можно еще представить в виде поворота на мнимый угол $\alpha=i\psi$ в плоскости X^4, X^1, где $x^4\equiv ix^0$:

$$x'^4=x^4\cos\alpha-x^1\sin\alpha,\quad x'^1=x^4\sin\alpha+x^1\cos\alpha. \tag{72.9}$$

На плоскости Минковского могут быть наглядно проиллюстрированы все следствия преобразований Лоренца. Но предварительно полезно выяснить некоторые особенности псевдоэвклидовой геометрии Минковского. Прежде всего отметим, что роль окружностей на плоскости Минковского играют гиперболы $s^2=\mathrm{const}$, т. е. кривые вида

$$\left(x^0-a\right)^2-\left(x^1-b\right)^2=\pm d^2,$$

с центром в точке $(a,\ b)$ и с минимальным расстоянием до него d.

Задача 72.1. *Показать, что во всяком треугольнике ABC на плоскости Минковского, вершины которого соединены интервалами одного рода (либо пространственноподобными, либо времениподобными), бóльшая сторона превосходит сумму двух других. Например,*

$$|AB|>|BC|+|CA|. \tag{72.10}$$

Изучим теперь свойства гиперболического поворота (72.6). На плоскости Минковского X^0, X^1 новые оси координат X'^0 и X'^1 имеют вид прямых

$$x^0=\beta^{-1}x^1,\quad x^0=\beta x^1,$$

причем биссектрисой угла между ними является прямая $x^0=x^1$ (рис. 72.1). Пусть единичные отрезки $|OA|$ и $|OB|$ изображают соответственно масштабы измерения времени и длины в неподвижной системе отсчета Σ. При гиперболическом повороте точка A перейдет в точку C, лежащую на гиперболе $(x^0)^2-(x^1)^2=1$, а точка B — в точку D, лежащую на гиперболе

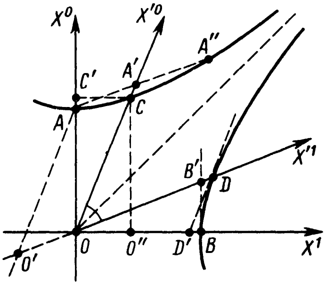

Рис. 72.1

$(x^0)^2-(x^1)^2=-1$. Так как гиперболы играют роль окружностей, то $|OC|=|OA|=1$ и $|OD|=|OB|=1$, т. е. новыми масштабами (в движущейся системе отсчета Σ') будут единичные отрезки $|OC|$ и $|OD|$.

Задача 72.2. *Показать, что хорды типа AA''* (рис. 72.1), *проведенные параллельно оси X'^1, рассекаются осью X'^0 пополам* (*аналогичным свойством обладает, очевидно, и ось X'^1 по отношению к хордам гиперболы BD*).

Из указанной теоремы, в частности, вытекает, что касательная к гиперболе в точке C параллельна оси X'^1. Нетрудно видеть, что эта теорема является псевдоэвклидовым вариантом известной теоремы эвклидовой геометрии, гласящей, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. В самом деле, гипербола ACA'' играет в псевдоэвклидовой геометрии роль окружности с центром в точке O, а ось X'^0 является ее диаметром. Следовательно, отрезки $|AA''|$ и $|OA'|$ должны быть ортогональными в псевдоэвклидовом смысле. Это действительно так, поскольку их скалярное произведение [см. (72.6)] исчезает. Забегая несколько вперед, укажем, что псевдоэвклидово скалярное произведение двух векторов $a=(a^0, a^1)$ и $b=(b^0, b^1)$ на плоскости Минковского X^0, X^1 определяется следующим образом (см. § 73):

$$(ab)\equiv a^0b^0-a^1b^1. \tag{72.11}$$

Рассмотрим теперь на плоскости Минковского эффекты сокращения длин движущихся масштабов и замедления хода движущихся часов. Начнем с измерения длин. Пусть единичный масштаб $|OB|$ (рис. 72.1) неподвижен в системе Σ, т. е. мировые линии его концов суть прямые $x^1=0$ (ось X^0) и $x^1=1$ (касательная к гиперболе в точке B). При измерении длины этого масштаба в системе Σ' мы сравниваем его с масштабом $|OD|$ в момент $x'^0=0$ (ось X'^1). Пересечение мировой линии $x^1=1$ и оси X'^1 дает точку B'. Таким образом, измеренная длина есть $|OB'|$. Подставляя в (72.6) $x'^0=0$, $x^1=1$, находим $x'^1=|OB'|=\gamma^{-1}$ в соответствии с (69.5).

Чтобы убедиться в обратимости этого эффекта, рассмотрим единичный масштаб $|OD|$ в системе Σ'. Мировые линии его концов суть $x'^1=0$ (ось X'^0) и $x'^1=1$ (касательная к гиперболе в точке D). При измерении длины этого масштаба в системе Σ мы сравниваем его с соответствующим масштабом $|OB|$ в момент $x^0=0$ (ось X^1). Пересечение мировой линии $x'^1=1$ и оси X^1 дает точку D'. Подставляя в (72.6) $x'^1=1$ и $x^0=0$, получаем $|OD'|=\gamma^{-1}$ в соответствии с (69.2).

Перейдем теперь к измерению промежутков времени. Возьмем часы в системе Σ (мировая линия — ось X^0) и для измерения их хода в системе Σ' установим в последней еще двое часов (мировые линии — прямая $O'A$ и ось X'^0). Пересечение мировых линий неподвижных и движущихся часов и определяет показание неподвижных часов — отрезок времени $|OA|=1$, который, очевидно, нужно сравнивать с отрезком $|OA'|$ — показанием движущихся часов. Отрезок $|OA'|=|O'A|$ найдем из (72.6), подставляя туда $x'^1=0$ и $x^0=1$. При этом получим $|OA'|=x'^0=\gamma$ в соответствии с (70.1).

Если же имеются часы в системе Σ' (мировая линия — ось X'^0), то для измерения их хода в системе Σ установим в последней двое часов (мировые линии — ось X^0 и прямая $O''C$). Пересечение указанных мировых линий и определяет показание движущихся часов — отрезок $|OC|=1$, который следует сравнить с $|OC'|$ — показанием неподвижных часов. Отрезок $|OC'|$ найдем из (72.6), подставляя туда $x'^1=0$ и $x'^0=1$, что дает $|OC'|=x^0=\gamma$, как и должно быть.

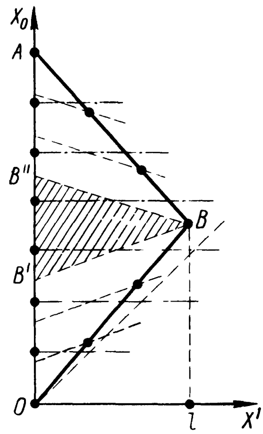

Рис. 72.2

На плоскости Минковского наглядно разъясняется и парадокс часов. На рис. 72.2 изображены мировые линии часов A ($OB'B''A$) и часов B (OBA). Длины этих мировых линий, деленные на скорость света, и определяют показания часов A и B. Так как отрезки, образующие треугольник OAB, времениподобны, то можно применить неравенство (72.10), из которого выводим, что

$$|AO|>|AB|+|BO|, \tag{72.12}$$

т. е. часы B покажут меньшее время, чем часы A. В нашем примере (рис. 72.2) $|AO|=7$, $|AB|+|OB|=6$, причем линии синхронизации (одновременности) для часов A изображены штрихпунктиром, а для часов B — штрихом.

Так как неравенство (72.12) содержит лишь интервалы, т. е. имеет инвариантный характер, то эффект отставания часов B от часов A также инвариантен, т. е. должен наблюдаться в любой инерциальной системе отсчета. Однако система Σ', связанная с часами B, неинерциальна, поэтому, строго говоря, парадокс часов может быть разрешен только в результате распространения понятия интервала на неинерциальные системы отсчета (неинерциальное движение тел), что достигается заменой (72.2) выражением для бесконечно малого интервала $\mathrm{d}s=(c^2\mathrm{d}T^2-\mathrm{d}R^2)^{1/2}$.

Тем не менее на плоскости Минковского можно отчетливо увидеть, как проявляется этот эффект неинерциальности. В самом деле, на участке OB, где система Σ' инерциальна, ход часов A отстает от хода часов B, так как $|OB'|<|OB|$. Однако в окрестности точки B, где скорость системы Σ' изменяется, происходит поворот линий синхронизации часов B на угол $B'BB''$ и при этом возникает поправка $|B'B''|$ в оценке показаний часов A в системе Σ'. Ее учет и позволяет разрешить парадокс, так как, несмотря на дополнительное отставание хода часов A от хода часов B на участке BA ($|B''A|<|BA|$), окончательный результат определяется неравенством (72.12).

Здесь, пожалуй, уместно привести слова известного немецкого физика-теоретика *А. Зоммерфельда*, который в примечании к очередному изданию статьи Г. Минковского «Пространство и время»* писал: «Как отметил Минковский в одной из бесед со мною, элемент собственного времени $d\tau$ не есть полный дифференциал. Таким образом, если соединить две мировые точки O и P двумя различными мировыми линиями *1* и *2*, то $\int\limits_1 d\tau \neq \int\limits_2 d\tau$. Если первая мировая линия проходит параллельно оси t, вследствие чего первый переход в координатной системе, положенной в основу, означает покой, то легко видеть, что $\int\limits_1 d\tau = t$, $\int\limits_2 d\tau < t$, ... Для того чтобы можно было сравнивать движущиеся часы с часами, покоящимися в мировой точке P, первые, конечно, должны быть ускорены (путем изменения скоростей или направлений). Отставание движущихся часов указывает, следовательно, не столько на «движение», сколько на «ускоренное движение». Поэтому здесь нет противоречия с принципом относительности».

§ 73. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

Преобразования Лоренца представляют собой действительные линейные преобразования координат x^0, x^1, x^2, x^3, сопоставляемых каждой точке четырехмерного пространственно-временного континуума:

$$x'^{\mu} = \sum_{\gamma=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}; \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{73.1}$$

При этом матрица преобразования Λ, называемая иногда *матрицей Лоренца*, для перехода к системе отсчета, движущейся вдоль оси X^1, имеет вид

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{73.2}$$

где $\beta = v/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Обратное же преобразование осуществляется с помощью матрицы $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$. В дальнейшем

---

* *Минковский Г.* Пространство и время.— В сб.: Принцип относительности. Л., 1935. С. 208—209.