как, несмотря на дополнительное отставание хода часов A от хода часов B на участке BA ($|B''A|<|BA|$), окончательный результат определяется неравенством (72.12).

Здесь, пожалуй, уместно привести слова известного немецкого физика-теоретика *А. Зоммерфельда*, который в примечании к очередному изданию статьи Г. Минковского «Пространство и время»* писал: «Как отметил Минковский в одной из бесед со мною, элемент собственного времени $d\tau$ не есть полный дифференциал. Таким образом, если соединить две мировые точки O и P двумя различными мировыми линиями *1* и *2*, то $\int\limits_1 d\tau \neq \int\limits_2 d\tau$. Если первая мировая линия проходит параллельно оси t, вследствие чего первый переход в координатной системе, положенной в основу, означает покой, то легко видеть, что $\int\limits_1 d\tau = t$, $\int\limits_2 d\tau < t$, ... Для того чтобы можно было сравнивать движущиеся часы с часами, покоящимися в мировой точке P, первые, конечно, должны быть ускорены (путем изменения скоростей или направлений). Отставание движущихся часов указывает, следовательно, не столько на «движение», сколько на «ускоренное движение». Поэтому здесь нет противоречия с принципом относительности».

§ 73. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ

Преобразования Лоренца представляют собой действительные линейные преобразования координат x^0, x^1, x^2, x^3, сопоставляемых каждой точке четырехмерного пространственно-временного континуума:

$$x'^{\mu} = \sum_{\gamma=0}^{3} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}; \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{73.1}$$

При этом матрица преобразования Λ, называемая иногда *матрицей Лоренца*, для перехода к системе отсчета, движущейся вдоль оси X^1, имеет вид

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{73.2}$$

где $\beta = v/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Обратное же преобразование осуществляется с помощью матрицы $\Lambda^{-1}(\beta) = \Lambda(-\beta)$. В дальнейшем

---

* *Минковский Г.* Пространство и время.— В сб.: Принцип относительности. Л., 1935. С. 208—209.

для упрощения записи мы будем принимать правило суммирования Эйнштейна с условием, что латинские индексы i, j, k, l, ... нумеруют пространственные координаты (компоненты) 1, 2, 3, а греческие μ, ν, σ, τ, ...— пространственно-временные 0, 1, 2, 3.

Закон преобразования (73.1) можно положить в основу четырехмерной классификации всех физических величин совершенно аналогично тому, как это было сделано в трехмерном случае (см. приложение). Начнем с определения четырехмерного вектора (сокращенно — 4-вектор). Именно: *контравариантными компонентами* 4-вектора a назовем совокупность четырех величин a^0, a^1, a^2, a^3, которые при преобразовании Лоренца изменяются так же, как координаты x^μ, т. е. по закону

$$a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu. \tag{73.3}$$

Контравариантными компонентами 4-тензора ранга n назовем величины $T^{\nu_1 \dots \nu_n}$, которые при преобразованиях Лоренца изменяются так же, как произведения соответствующих компонент 4-векторов:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} T^{\nu_1 \dots \nu_n}. \tag{73.4}$$

Используем теперь важную особенность физического пространства-времени, открытую Минковским и состоящую в том, что геометрия пространственно-временного континуума является псевдоевклидовой. Согласно Минковскому, мерой расстояния между двумя близкими точками x и $x + \mathrm{d}x$ является элементарный интервал $\mathrm{d}s$, квадрат которого равен

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 \equiv g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu. \tag{73.5}$$

Здесь мы ввели псевдоевклидов четырехмерный метрический тензор $g_{\mu\nu}$, определяемый диагональной матрицей

$$\| g_{\mu\nu} \| = \mathrm{diag}[1, \ -1, \ -1, \ -1] \tag{73.6}$$

и, очевидно, совпадающий со своим обратным:

$$(g^{-1})^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}.$$

Задача 73.1. *Показать, что метрический тензор* (73.6) *инвариантен при преобразованиях Лоренца.*

С помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ можно ввести *ковариантные компоненты* 4-вектора a, полагая

$$a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu, \tag{73.7}$$

т. е. $a_0 = a^0$, $a_i = -a^i$. Закон преобразования ковариантных компонент следует из инвариантности интервала относительно преобразований Лоренца. Вводя соответствующую матрицу преобразования $\tilde{\Lambda}$

$$a'_\mu = \tilde{\Lambda}^\nu_\mu a_\nu, \tag{73.8}$$

с учетом (73.7) имеем

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dx'_\mu dx'^\mu = dx_\nu \tilde{\Lambda}^\nu_\mu \Lambda^\mu_\sigma dx^\sigma.$$

Отсюда

$$\tilde{\Lambda}^\nu_\mu \Lambda^\mu_\sigma = \delta^\nu_\sigma, \tag{73.9}$$

т. е. ковариантные компоненты преобразуются с помощью обратной транспонированной матрицы Лоренца $\tilde{\Lambda} = [\Lambda^{-1}]^T$. Из этого результата сразу же следует, что псевдоэвклидово скалярное произведение двух 4-векторов $a = (a^0, \mathbf{a})$ и $b = (b^0, \mathbf{b})$, определенное как

$$(ab) \equiv a^0 b^0 - (\mathbf{ab}) = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu, \tag{73.10}$$

является инвариантным при преобразованиях Лоренца.

В зависимости от знака своего квадрата $a^2 \equiv (aa)$ 4-вектор a называется *времениподобным* ($a^2 > 0$), *пространственноподобным* ($a^2 < 0$) или *изотропным* ($a^2 = 0$).

Задача 73.2. *Показать, что два ортогональных изотропных 4-вектора параллельны, т. е. из $a^2 = b^2 = (ab) = 0$ следует, что $a^\mu = \lambda b^\mu$, где λ — некоторый скаляр.*

По аналогии с (73.7) нетрудно определить ковариантные компоненты тензора ранга n:

$$T_{\mu_1 \ldots \mu_n} = g_{\mu_1 \nu_1} \ldots g_{\mu_n \nu_n} T^{\nu_1 \ldots \nu_n}, \tag{73.11}$$

а также его смешанные компоненты:

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_l}_{\nu_1 \ldots \nu_m} = g_{\nu_1 \sigma_1} \ldots g_{\nu_m \sigma_m} T^{\sigma_1 \ldots \sigma_m \mu_1 \ldots \mu_l}, \tag{73.12}$$

где $n = m + l$. Закон их преобразования очевиден:

$$T'_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \tilde{\Lambda}^{\nu_1}_{\mu_1} \ldots \tilde{\Lambda}^{\nu_n}_{\mu_n} T_{\nu_1 \ldots \nu_n}, \quad T'^{\mu_1 \ldots \mu_l}_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \tilde{\Lambda}^{\sigma_1}_{\nu_1} \ldots \tilde{\Lambda}^{\sigma_m}_{\nu_m} \Lambda^{\mu_1}_{\tau_1} \ldots \Lambda^{\mu_l}_{\tau_l} T^{\tau_1 \ldots \tau_l}_{\sigma_1 \ldots \sigma_m}. \tag{73.13}$$

Из структуры (73.6) метрического тензора $g_{\mu\nu}$ вытекает, что при опускании или подъеме некоторого индекса ν компонента тензора не меняется, если $\nu = 0$, и меняет знак, если $\nu = i = 1, 2, 3$.

Тензор ранга $n \geqslant 2$ называется либо *симметричным*, либо *антисимметричным* по некоторым индексам ν_r и ν_s, если при их перестановке его компоненты не меняются либо соответственно меняют знак, т. е.

$$T^{\nu_1 \ldots \nu_r \ldots \nu_s \ldots \nu_n} = \pm T^{\nu_1 \ldots \nu_s \ldots \nu_r \ldots \nu_n}.$$

Задача 73.3. *Показать, что при преобразованиях Лоренца свойство симметрии или антисимметрии тензора сохраняется. Подсчитать число независимых компонент симметричного тензора ранга n.*

Имея два тензора $M^{\cdots}$ и $N^{\cdots}$ рангов m и n соответственно, можно образовать новый тензор ранга $m + n$ с компонентами

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_m \nu_1 \ldots \nu_n} = M^{\mu_1 \ldots \mu_m} N^{\nu_1 \ldots \nu_n}.$$

Эта операция называется *внешним* или *тензорным умножением*. Ее можно дополнить операцией *свертки*, когда некоторые верхние индексы полагаются равными соответствующим нижним индексам и по ним производится суммирование:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{s}{}_{s} = M^{\mu_1 \dots \mu_m s \alpha_1 \dots \alpha_s} N_{\nu_1 \dots \nu_n s \alpha_1 \dots \alpha_s}.$$

Очевидно, что каждая свертка уменьшает ранг тензора на 2. В частности, свертка в тензоре второго ранга приводит к скалярной величине, называемой *шпуром* или *следом* этого тензора:

$$T_\nu^\nu \equiv \operatorname{Sp} \hat{\mathrm{T}}.$$

Построенная нами четырехмерная классификация физических величин, т. е. представление их в виде компонент релятивистских тензоров различных рангов*, не является, однако, полной, поскольку мы ограничились *собственными преобразованиями Лоренца*, представляющими собой лишь частный случай общих преобразований Лоренца. Последние обычно определяются как линейные преобразования вида (73.1), оставляющие инвариантной фундаментальную квадратичную форму (73.5). Очевидно, что *общие преобразования Лоренца* включают в себя помимо чистых преобразований Лоренца типа (73.2) еще *трехмерные повороты*, задаваемые ортогональными матрицами вида

$$\Lambda_0^0 = 1, \quad \Lambda_0^i = \Lambda_i^0 = 0, \quad |\Lambda| \equiv \det \Lambda = 1,$$

а также *отражения пространства и времени*, для которых соответственно

$$\Lambda = \pm \operatorname{diag}[1, \ -1, \ -1, \ -1] = \pm \| g_{\mu\nu} \|.$$

Задача 73.4. *Вывести из инвариантности* $\mathrm{d}s^2$, *что* $|\Lambda| = \pm 1$ *и*

$$(\Lambda_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda_0^i)^2 \geqslant 1. \tag{73.14}$$

В связи с неравенством (73.14) общие преобразования Лоренца разделяются на два класса:

а) *ортохронные* ($\Lambda_0^0 \geqslant 1$), сохраняющие направление времени;

б) *антихронные* ($\Lambda_0^0 \leqslant -1$), изменяющие направление времени на обратное.

В большинстве физических рассмотрений обычно ограничиваются ортохронными преобразованиями Лоренца, которые в свою очередь делятся на *собственные преобразования Лоренца*, отвечающие $|\Lambda| = +1$, и *несобственные преобразования Лоренца*,

---

* При этом надо, конечно, иметь в виду, что многие физические величины, например углы, не являясь сами компонентами релятивистских тензоров, тем не менее представляются функциями от них.

выделенные условием $|\Lambda|=-1$ и включающие отражение пространства.

Так как дважды повторенное пространственное отражение эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. $\Lambda^2=I\equiv\operatorname{diag}[1, 1, 1, 1]$, то поведение любой физической величины при пространственном отражении допускает лишь две возможности: либо она ведет себя при этом как соответствующая компонента тензора, либо приобретает дополнительный знак минус, преобразуясь как компонента *псевдотензора* [см. (1П.9)]. При классификации физических величин относительно пространственных отражений полезную роль играет четырехмерный полностью антисимметричный псевдотензор Леви-Чивиты $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$, меняющий знак при перестановке любых двух индексов и связанный с трехмерным символом Леви-Чивиты ε^{ijk} условием

$$\varepsilon^{0ijk}=\varepsilon^{ijk}. \tag{73.15}$$

Задача 73.5. *Показать, что тензор* $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ *инвариантен относительно ортохронных преобразований Лоренца.*

Если имеется некоторый несимметричный тензор не выше четвертого ранга, то его можно свернуть с $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$. Полученный таким путем новый псевдотензор называется *дуальным* исходному, а сама операция — *дуальным сопряжением*. Так, скаляру φ, вектору φ^μ и антисимметричным тензорам $\varphi^{\mu\nu}$, $\varphi^{\mu\nu\sigma}$, $\varphi^{\mu\nu\sigma\tau}$ можно сопоставить дуальные им псевдовеличины:

$$\tilde\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi,\quad \tilde\varphi_{\mu\nu\sigma}=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^\tau,\quad \tilde\varphi_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^{\sigma\tau}/2,$$
$$\tilde\varphi_\mu=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^{\nu\sigma\tau}/3!,\quad \tilde\varphi=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^{\mu\nu\sigma\tau}/4!.$$

Важным примером дуального сопряжения является вычисление объема 4-параллелепипеда $\Omega(a, b, c, d)$, построенного на четырех линейно независимых векторах a, b, c, d:

$$\Omega(a, b, c, d)=-\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}a^\mu b^\nu c^\sigma d^\tau=\begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3\\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3\\ c^0 & c^1 & c^2 & c^3\\ d^0 & d^1 & d^2 & d^3\end{vmatrix}. \tag{73.16}$$

§ 74. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Основные операции трехмерного векторного анализа легко распространяются и на четырехмерный случай. Так, четырехмерным аналогом оператора Гамильтона ∇ является оператор дифференцирования (4-*градиент*)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\equiv\partial_\mu=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right), \tag{74.1}$$