выделенные условием $|\Lambda|=-1$ и включающие отражение пространства.

Так как дважды повторенное пространственное отражение эквивалентно тождественному преобразованию, т. е. $\Lambda^2=I\equiv \mathrm{diag}\,[1,\ 1,\ 1,\ 1]$, то поведение любой физической величины при пространственном отражении допускает лишь две возможности: либо она ведет себя при этом как соответствующая компонента тензора, либо приобретает дополнительный знак минус, преобразуясь как компонента *псевдотензора* [см. (1П.9)]. При классификации физических величин относительно пространственных отражений полезную роль играет четырехмерный полностью антисимметричный псевдотензор Леви-Чивиты $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$, меняющий знак при перестановке любых двух индексов и связанный с трехмерным символом Леви-Чивиты ε^{ijk} условием

$$\varepsilon^{0ijk}=\varepsilon^{ijk}. \tag{73.15}$$

Задача 73.5. *Показать, что тензор $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ инвариантен относительно ортохронных преобразований Лоренца.*

Если имеется некоторый несимметричный тензор не выше четвертого ранга, то его можно свернуть с $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$. Полученный таким путем новый псевдотензор называется *дуальным* исходному, а сама операция — *дуальным сопряжением.* Так, скаляру φ, вектору φ^μ и антисимметричным тензорам $\varphi^{\mu\nu}$, $\varphi^{\mu\nu\sigma}$, $\varphi^{\mu\nu\sigma\tau}$ можно сопоставить дуальные им псевдовеличины:

$$\tilde\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi,\quad \tilde\varphi_{\mu\nu\sigma}=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^\tau,\quad \tilde\varphi_{\mu\nu}=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^{\sigma\tau}/2,$$
$$\tilde\varphi_\mu=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^{\nu\sigma\tau}/3!,\quad \tilde\varphi=\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}\varphi^{\mu\nu\sigma\tau}/4!.$$

Важным примером дуального сопряжения является вычисление объема 4-параллелепипеда $\Omega(a,\ b,\ c,\ d)$, построенного на четырех линейно независимых векторах a, b, c, d:

$$\Omega(a,\ b,\ c,\ d)=-\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}a^\mu b^\nu c^\sigma d^\tau=\begin{vmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & a^3\\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3\\ c^0 & c^1 & c^2 & c^3\\ d^0 & d^1 & d^2 & d^3\end{vmatrix}. \tag{73.16}$$

§ 74. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Основные операции трехмерного векторного анализа легко распространяются и на четырехмерный случай. Так, четырехмерным аналогом оператора Гамильтона ∇ является оператор дифференцирования (4-*градиент*)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\equiv\partial_\mu=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right), \tag{74.1}$$

который при преобразованиях Лоренца ведет себя как 4-вектор, в чем можно легко убедиться*, рассмотрев дифференциал скалярной функции (см. задачу 67.1):

$$d\varphi = dx^{\mu}\partial\varphi/\partial x^{\mu} = dx^{\mu}\partial_{\mu}\varphi.$$

Очевидно, что величины $\partial_{\mu}\varphi$ являются ковариантными компонентами 4-вектора. Векторные свойства 4-градиента сохраняются и в том случае, когда он применяется к произвольному тензору. Объясняется это тем, что матрица преобразований Λ не зависит от координат:

$$\partial'_{\mu} T'^{\mu_1 \quad \mu_n}(x') = \partial_{\nu}\left(\Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \ldots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n} T^{\nu_1 \quad \nu_n}(x)\right) \partial x^{\nu}/\partial x'^{\mu} = \tilde{\Lambda}^{\nu}_{\mu}\Lambda^{\mu_1}_{\nu_1} \ldots \Lambda^{\mu_n}_{\nu_n}\partial_{\nu} T^{\nu_1 \quad \nu_n}(x).$$

Производя свертку в выражении $\partial_{\mu} T^{\mu\cdots}$, получаем четырехмерный аналог *дивергенции*

$$\partial_{\mu} T^{\mu\,\cdot\cdot} \equiv \operatorname{Div} T^{\;\cdot\cdot}. \tag{74.2}$$

В результате этой операции возникает новый тензор, ранг которого на единицу меньше. Так, в применении к вектору получается скаляр ($\partial_{\mu}A^{\mu} = \mathrm{inv}$), а в применении к тензору второго ранга — 4-вектор ($\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = B^{\nu}$).

С помощью ∂_{μ} оператор Даламбера можно представить в виде

$$\Box \equiv -\partial_{\mu}\partial^{\mu} = -g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}. \tag{74.3}$$

Четырехмерным аналогом *ротора* некоторого 4-вектора A является антисимметричный тензор

$$\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \equiv (\operatorname{Rot} A)_{\mu\nu}. \tag{74.4}$$

Перейдем теперь к некоторым интегральным теоремам в четырехмерном случае. Прежде всего построим элементарный 4-объем $d\Omega$ как объем 4-параллелепипеда с направляющими 4-векторами $c\,dt$, dx, dy, dz:

$$d\Omega = -\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} c\,dt^{\mu} dx^{\nu} dy^{\sigma} dz^{\tau}. \tag{74.5}$$

Отсюда очевидна инвариантность 4-объема относительно собственных преобразований Лоренца. Если выбрать направляющие векторы ортогональными, положив

$$c\,dt^{\mu} = (dx^0,\ 0,\ 0,\ 0);\quad dx^{\mu} = (0,\ dx^1,\ 0,\ 0);$$
$$dy^{\mu} = (0,\ 0,\ dx^2,\ 0);\quad dz^{\mu} = (0,\ 0,\ 0,\ dx^3),$$

то получим обычное выражение

$$d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{74.6}$$

Задача 74.1. *Убедиться в инвариантности 4-объема* (74.6) *при собственных преобразованиях Лоренца Вывести отсюда инвариантность четырехмерной* δ-*функции*:

$$\delta(x) \equiv \delta(x^0)\,\delta(x^1)\,\delta(x^2)\,\delta(x^3). \tag{74.7}$$

Соотношение (74.5) можно также переписать в виде

$$d\Omega = c\,dt^{\mu}d\sigma_{\mu}, \tag{74.8}$$

введя направленный элемент гиперповерхности

$$d\sigma_{\mu} \equiv -\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}dx^{\nu}dy^{\sigma}dz^{\tau}. \tag{74.9}$$

Так как все физические величины (заряд, масса, энергия, импульс и т. д.) получаются как интегралы по 3-объему от соответствующих плотностей, то чаще всего приходится иметь дело с *пространственноподобными гиперповерхностями*, для которых псевдовектор $d\sigma_{\mu}$ является времениподобным, т. е. $d\sigma_{\mu}d\sigma^{\mu} > 0$. В таком случае можно ввести *инвариантный элемент гиперповерхности* (псевдоскаляр)

$$d\sigma \equiv (d\sigma_{\mu}d\sigma^{\mu})^{1/2} \tag{74.10}$$

и записать $d\sigma_{\mu}$ в виде

$$d\sigma_{\mu} = n_{\mu}d\sigma, \tag{74.11}$$

где $n_{\mu} = d\sigma_{\mu}/d\sigma$ — единичный времениподобный вектор нормали к гиперповерхности.

Задача 74.2. *В приложениях часто используется инвариантная трехмерная δ-функция* $\delta(x|\sigma)$, *заданная на пространственноподобной гиперповерхности* σ (*с нормалью* n_{μ}) *и связанная с четырехмерной δ-функцией соотношением*

$$\delta(x) = \delta(n_{\mu}x^{\mu})\,\delta(x|\sigma). \tag{74.12}$$

Убедиться, что $\delta(x|\sigma)$ *обладает обычным свойством δ-функции*

$$\int\limits_{\sigma} f(x')\,\delta(x'-x|\sigma)\,d\sigma' = \begin{cases} 0, & x \bar{\in} \sigma; \\ f(x), & x \in \sigma, \end{cases}$$

и показать, что $n^{\mu}\partial_{\mu}\delta(x|\sigma) = 0$.

Задача 74.3. *Доказать справедливость следующего интегрального представления 4-градиента*:

$$\partial_{\mu} = \lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\Omega}\oint\limits_{\sigma} d\sigma_{\mu}, \tag{74.13}$$

где σ — *замкнутая гиперповерхность, охватывающая 4-объем* Ω, *стягивающийся в точку.*

Из представления (74.13) вытекает важная в приложениях *четырехмерная теорема Гаусса — Остроградского*:

$$\int\limits_{\Omega} \partial_{\mu} T^{\nu_1 \ldots \nu_n} d\Omega = \oint\limits_{\sigma} T^{\nu_1 \ldots \nu_n} d\sigma_{\mu}, \tag{74.14}$$

где σ — замкнутая гиперповерхность, окружающая 4-объем Ω.

Задача 74.4. *Доказать четырехмерную теорему Стокса:*

$$\oint_C A_\mu \mathrm{d}x^\mu = \int_S (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,\mathrm{d}S^{\mu\nu}, \qquad (74.15)$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на замкнутый контур C, $\mathrm{d}S^{\mu\nu}$ — ее элемент, определяемый двумя бесконечно малыми касательными к S векторами $\mathrm{d}x$ и δx:

$$\mathrm{d}S^{\mu\nu} = 2^{-1}(\mathrm{d}x^\mu \delta x^\nu - \mathrm{d}x^\nu \delta x^\mu).$$

§ 75. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

В пространстве Минковского всякая движущаяся материальная точка изображается мировой линией (рис. 75.1). Так как элементом длины такой мировой линии является элементарный времениподобный интервал* $\mathrm{d}s = (\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu)^{1/2}$, то единичный касательный вектор к мировой линии имеет компоненты

$$\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^\mu/\sqrt{(\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}\mathbf{x})^2}. \qquad (75.1)$$

Вспоминая, что *собственное время* τ в системе отсчета Σ', связанной с материальной точкой, определяется длиной интервала

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s/c = \mathrm{d}t\sqrt{1 - u^2/c^2}, \qquad (75.2)$$

где u — трехмерная скорость точки с компонентами $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t$, можно ввести 4-вектор U, имеющий размерность скорости и пропорциональный касательному вектору к мировой линии:

$$U^\mu \equiv c\,\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau. \qquad (75.3)$$

Этот 4-вектор называется *четырехмерной скоростью точки* и имеет следующие компоненты:

$$U^\mu = (U^0,\ \mathbf{U}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\ \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right). \qquad (75.4)$$

В предельном случае медленных движений, когда $u \ll c$, получим

$$U^\mu \approx (c,\ \mathbf{u}),$$

т. е. 4-вектор U фактически сводится к трехмерной скорости $\mathbf{u}$ и удовлетворяет, таким образом, принципу соответствия.

Очевидно, компоненты 4-скорости U^μ преобразуются по закону (73.3), т. е.

$$U'^0 = \gamma(U^0 - \beta U^1),\quad U'^1 = \gamma(U^1 - \beta U^0),\quad U'^2 = U^2,\quad U'^3 = U^3. \qquad (75.5)$$

Важным свойством четырехмерной скорости является постоянство ее длины:

$$U^2 = U_\mu U^\mu = (U^0)^2 - \mathbf{U}^2 = c^2. \qquad (75.6)$$

---

* Рассматривается частица, движущаяся со скоростью, меньшей скорости света.