Задача 74.4. *Доказать четырехмерную теорему Стокса:*

$$\oint\limits_C A_\mu dx^\mu = \int\limits_S (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dS^{\mu\nu}, \qquad (74.15)$$

где S — правоориентированная поверхность, натянутая на замкнутый контур C, $dS^{\mu\nu}$ — ее элемент, определяемый двумя бесконечно малыми касательными к S векторами dx и δx:

$$dS^{\mu\nu} = 2^{-1}(dx^\mu \delta x^\nu - dx^\nu \delta x^\mu).$$

§ 75. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ

В пространстве Минковского всякая движущаяся материальная точка изображается мировой линией (рис. 75.1). Так как элементом длины такой мировой линии является элементарный времениподобный интервал* $ds = (dx_\mu dx^\mu)^{1/2}$, то единичный касательный вектор к мировой линии имеет компоненты

$$dx^\mu/ds = dx^\mu/\sqrt{(dx^0)^2 - (d\mathbf{x})^2}. \qquad (75.1)$$

Вспоминая, что *собственное время* τ в системе отсчета Σ', связанной с материальной точкой, определяется длиной интервала

$$d\tau = ds/c = dt\sqrt{1 - u^2/c^2}, \qquad (75.2)$$

где u — трехмерная скорость точки с компонентами dx^i/dt, можно ввести 4-вектор U, имеющий размерность скорости и пропорциональный касательному вектору к мировой линии:

$$U^\mu \equiv c\,dx^\mu/ds = dx^\mu/d\tau. \qquad (75.3)$$

Этот 4-вектор называется *четырехмерной скоростью точки* и имеет следующие компоненты:

$$U^\mu = (U^0, \mathbf{U}) = \left(\frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right). \qquad (75.4)$$

В предельном случае медленных движений, когда $u \ll c$, получим

$$U^\mu \approx (c, \mathbf{u}),$$

т. е. 4-вектор U фактически сводится к трехмерной скорости $\mathbf{u}$ и удовлетворяет, таким образом, принципу соответствия.

Очевидно, компоненты 4-скорости U^μ преобразуются по закону (73.3), т. е.

$$U'^0 = \gamma(U^0 - \beta U^1),\quad U'^1 = \gamma(U^1 - \beta U^0),\quad U'^2 = U^2,\quad U'^3 = U^3. \qquad (75.5)$$

Важным свойством четырехмерной скорости является постоянство ее длины:

$$U^2 = U_\mu U^\mu = (U^0)^2 - \mathbf{U}^2 = c^2. \qquad (75.6)$$

---

* Рассматривается частица, движущаяся со скоростью, меньшей скорости света.

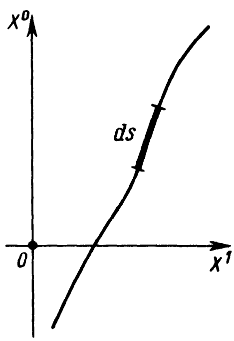

Рис. 75.1

Дифференцируя (75.6) по τ, найдем интересное соотношение

$$U_\mu dU^\mu/d\tau=0, \tag{75.7}$$

выражающее факт ортогональности четырехмерных скорости и ускорения точки. Последнее тоже является 4-вектором и имеет следующие компоненты:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau}=\left(\frac{(\mathbf{ua})}{c(1-u^2/c^2)^2},\ \frac{\mathbf{a}}{1-u^2/c^2}+\frac{\mathbf{u}(\mathbf{au})}{c^2(1-u^2/c^2)^2}\right), \tag{75.8}$$

где $\mathbf{a}=d\mathbf{u}/dt$ — трехмерное ускорение точки. В предельном случае медленных движений, очевидно,

$$dU^\mu/d\tau\approx(0,\ \mathbf{a}),$$

т. е. 4-вектор ускорения пространственноподобен.

Задача 75.1. *Ракета движется прямолинейно с постоянным собственным ускорением a и без начальной скорости. Найти скорость ракеты как функцию лабораторного и собственного времен.*

§ 76. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Так как $\mathbf{U}=\mathbf{u}U^0/c$ [см. (75.4)], то из (75.5) вытекает следующий закон преобразования трехмерных скоростей:

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-u_xv/c^2},\quad u'_y=\frac{u_y\gamma^{-1}}{1-u_xv/c^2},\quad u'_z=\frac{u_z\gamma^{-1}}{1-u_xv/c^2}. \tag{76.1}$$

Обратные преобразования получаются из (76.1) заменой $v\to -v$:

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+u'_xv/c^2},\quad u_y=\frac{u'_y\gamma^{-1}}{1+u'_xv/c^2},\quad u_z=\frac{u'_z\gamma^{-1}}{1+u'_xv/c^2}. \tag{76.2}$$

Иногда бывает удобной и векторная запись формул (76.2):

$$\mathbf{u}=\left[1+(\mathbf{u}'\mathbf{v})/c^2\right]^{-1}\left[\gamma^{-1}\mathbf{u}'+\mathbf{v}+(1-\gamma^{-1})(\mathbf{u}'\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2\right]. \tag{76.3}$$

Если при $v\ll c$ из (76.3) вытекает нерелятивистский закон сложения скоростей ($\mathbf{u}\approx\mathbf{u}'+\mathbf{v}$), то в области $v\approx c$ законы эвклидовой геометрии в пространстве скоростей оказываются уже несправедливыми*.

* Знаменательно, что закон (76.3) сложения векторов около 150 лет тому назад был исследован гениальным русским геометром *Н. И. Лобачевским*, доказавшим возможность логически непротиворечивого построения новой геометрии, в которой уже не выполняется постулат Евклида о параллельных.