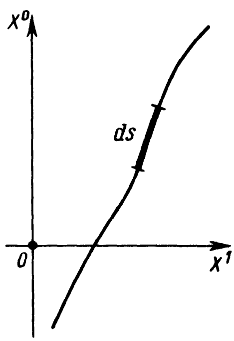

Рис. 75.1

Дифференцируя (75.6) по τ, найдем интересное соотношение

$$U_\mu dU^\mu/d\tau = 0, \tag{75.7}$$

выражающее факт ортогональности четырехмерных скорости и ускорения точки. Последнее тоже является 4-вектором и имеет следующие компоненты:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} = \left(\frac{(\mathbf{ua})}{c(1-u^2/c^2)^2},\ \frac{\mathbf{a}}{1-u^2/c^2} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{au})}{c^2(1-u^2/c^2)^2}\right), \tag{75.8}$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$ — трехмерное ускорение точки. В предельном случае медленных движений, очевидно,

$$dU^\mu/d\tau \approx (0,\ \mathbf{a}),$$

т. е. 4-вектор ускорения пространственноподобен.

Задача 75.1. *Ракета движется прямолинейно с постоянным собственным ускорением a и без начальной скорости. Найти скорость ракеты как функцию лабораторного и собственного времен.*

§ 76. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Так как $\mathbf{U} = \mathbf{u}U^0/c$ [см. (75.4)], то из (75.5) вытекает следующий закон преобразования трехмерных скоростей:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2},\quad u'_y = \frac{u_y \gamma^{-1}}{1 - u_x v/c^2},\quad u'_z = \frac{u_z \gamma^{-1}}{1 - u_x v/c^2}. \tag{76.1}$$

Обратные преобразования получаются из (76.1) заменой $v \to -v$:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2},\quad u_y = \frac{u'_y \gamma^{-1}}{1 + u'_x v/c^2},\quad u_z = \frac{u'_z \gamma^{-1}}{1 + u'_x v/c^2}. \tag{76.2}$$

Иногда бывает удобной и векторная запись формул (76.2):

$$\mathbf{u} = \left[1 + (\mathbf{u}'\mathbf{v})/c^2\right]^{-1}\left[\gamma^{-1}\mathbf{u}' + \mathbf{v} + (1-\gamma^{-1})(\mathbf{u}'\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2\right]. \tag{76.3}$$

Если при $v \ll c$ из (76.3) вытекает нерелятивистский закон сложения скоростей ($\mathbf{u} \approx \mathbf{u}' + \mathbf{v}$), то в области $v \approx c$ законы эвклидовой геометрии в пространстве скоростей оказываются уже несправедливыми*.

---

* Знаменательно, что закон (76.3) сложения векторов около 150 лет тому назад был исследован гениальным русским геометром *Н. И. Лобачевским*, доказавшим возможность логически непротиворечивого построения новой геометрии, в которой уже не выполняется постулат Евклида о параллельных.

Из (76.3), в частности, следует, что если $v \to c$, то и $u \to c$. Иначе говоря, если складывать две скорости, близкие к скорости света, то вновь получается околосветовая скорость. Здесь особенно отчетливо проявляется отклонение релятивистского закона сложения скоростей от нерелятивистского. Другой его особенностью является *некоммутативность*: результат сложения двух скоростей $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{v}$ отличается от результата сложения скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$. Очевидно, что это обстоятельство обусловлено неравноправием складываемых скоростей, среди которых выделенную роль играет относительная скорость двух систем отсчета.

Из условия инвариантности интервала $\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'^\mu$, которое можно переписать в виде

$$\left(c^2 - u^2\right)\mathrm{d}t^2 = \left(c^2 - u'^2\right)\mathrm{d}t'^2, \tag{76.4}$$

следует, что

$$\operatorname{sign}\left(c^2 - u^2\right) = \operatorname{sign}\left(c^2 - u'^2\right).$$

Это означает, что при переходе к любой инерциальной системе отсчета досветовые скорости ($u < c$) остаются досветовыми ($u' < c$), световые скорости ($u = c$) остаются световыми ($u' = c$), а сверхсветовые скорости ($u > c$) — сверхсветовыми ($u' > c$).

При сложении параллельных скоростей удобно пользоваться не скоростью, а *быстротой* θ, т. е. полагать

$$u_x = c \operatorname{th} \theta, \quad u'_x = c \operatorname{th} \theta', \quad v = c \operatorname{th} \psi.$$

Тогда преобразование (76.2) эквивалентно прямому сложению быстрот:

$$\theta = \theta' + \psi.$$

Релятивистские формулы сложения скоростей позволяют легко объяснить результат опыта Физо (см. § 63). Здесь необходимо сложить две скорости: скорость света в неподвижной воде $u' = c/n$ и параллельную ей скорость v водяного потока. Применяя (76.2), получаем скорость распространения света в движущейся воде:

$$u = \left(u' + v\right)\left(1 + u'v/c^2\right)^{-1} = c/n + v\left(1 - n^{-2}\right)\left[1 + v/(cn)\right]^{-1}.$$

Учитывая малость отношения v/c, нетрудно вывести подтвержденную в опыте Физо формулу Френеля

$$u \approx c/n + v\left(1 - 1/n^2\right).$$

§ 77. АБЕРРАЦИЯ И ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ДЛЯ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

Суть этих классических эффектов состоит в том, что если источник света и наблюдатель находятся в относительном движении, то наблюдаемый закон движения источника и частота испускаемого им света изменяются при изменении скорости