Из (76.3), в частности, следует, что если $v \to c$, то и $u \to c$. Иначе говоря, если складывать две скорости, близкие к скорости света, то вновь получается околосветовая скорость. Здесь особенно отчетливо проявляется отклонение релятивистского закона сложения скоростей от нерелятивистского. Другой его особенностью является *некоммутативность*: результат сложения двух скоростей $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{v}$ отличается от результата сложения скоростей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}'$. Очевидно, что это обстоятельство обусловлено неравноправием складываемых скоростей, среди которых выделенную роль играет относительная скорость двух систем отсчета.

Из условия инвариантности интервала $\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x'_\mu \mathrm{d}x'^\mu$, которое можно переписать в виде

$$\left(c^2 - u^2\right) \mathrm{d}t^2 = \left(c^2 - u'^2\right) \mathrm{d}t'^2, \tag{76.4}$$

следует, что

$$\operatorname{sign}\left(c^2 - u^2\right) = \operatorname{sign}\left(c^2 - u'^2\right).$$

Это означает, что при переходе к любой инерциальной системе отсчета досветовые скорости ($u < c$) остаются досветовыми ($u' < c$), световые скорости ($u = c$) остаются световыми ($u' = c$), а сверхсветовые скорости ($u > c$) — сверхсветовыми ($u' > c$).

При сложении параллельных скоростей удобно пользоваться не скоростью, а *быстротой* θ, т. е. полагать

$$u_x = c \operatorname{th} \theta, \quad u'_x = c \operatorname{th} \theta', \quad v = c \operatorname{th} \psi.$$

Тогда преобразование (76.2) эквивалентно прямому сложению быстрот:

$$\theta = \theta' + \psi.$$

Релятивистские формулы сложения скоростей позволяют легко объяснить результат опыта Физо (см. § 63). Здесь необходимо сложить две скорости: скорость света в неподвижной воде $u' = c/n$ и параллельную ей скорость v водяного потока. Применяя (76.2), получаем скорость распространения света в движущейся воде:

$$u = \left(u' + v\right)\left(1 + u'v/c^2\right)^{-1} = c/n + v\left(1 - n^{-2}\right)\left[1 + v/(cn)\right]^{-1}.$$

Учитывая малость отношения v/c, нетрудно вывести подтвержденную в опыте Физо формулу Френеля

$$u \approx c/n + v\left(1 - 1/n^2\right).$$

§ 77. АБЕРРАЦИЯ И ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА ДЛЯ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ

Суть этих классических эффектов состоит в том, что если источник света и наблюдатель находятся в относительном движении, то наблюдаемый закон движения источника и частота испускаемого им света изменяются при изменении скорости

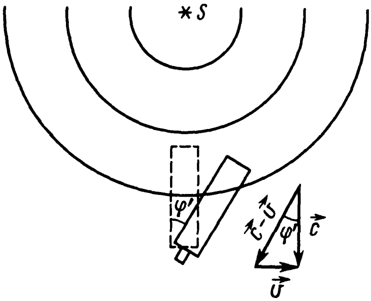

Рис. 77.1

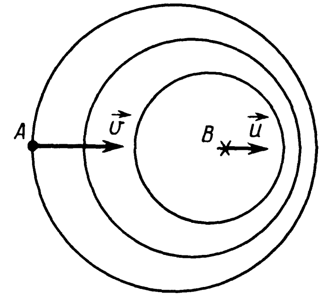

Рис. 77.2

наблюдателя. Посмотрим, как объясняются эти явления в теории неподвижного эфира.

Начнем с явления аберрации. Пусть световая волна распространяется под прямым углом к скорости **v** наблюдателя по отношению к неподвижному эфиру. Световой луч (рис. 77.1) достигает глаза наблюдателя только в том случае, если последний наклонит зрительную трубу по направлению движения на угол

$$\varphi' = \operatorname{arctg}(v/c). \tag{77.1}$$

Что касается изменения частоты света, то его происхождение также нетрудно понять. Так, если наблюдатель A движется к источнику B со скоростью v относительно эфира* (рис. 77.2), то за 1 с он, очевидно, насчитает больше гребней волн, чем неподвижный наблюдатель, в $1+v/c$ раз. Таким образом, наблюдаемая частота света ω' связана с частотой ω, регистрируемой неподвижным наблюдателем, соотношением Доплера

$$\omega' = \omega(1+v/c). \tag{77.2}$$

В отличие от классических «эфирных» теорий, которыми указанные эффекты объясняются раздельно, в теории относительности они оказываются связанными и описываются единым образом. При этом выясняется, что происхождение этих эффектов чисто кинематическое.

Если источник света достаточно удален, то порождаемые им волны можно считать плоскими. Рассмотрим поэтому распространяющуюся в вакууме плоскую монохроматическую электромагнитную волну. Введем две инерциальные системы отсчета Σ и Σ', оси которых будем считать параллельными, а скорость системы Σ' относительно Σ — направленной по оси X и равной $v=\beta c$. Пусть в системе Σ волна распространяется в направлении

---

* При этом источник сам может двигаться относительно эфира с некоторой скоростью **u**.

s (рис. 77.3). Тогда каждая компонента электромагнитного поля содержит фазовый множитель

$$\exp(-i\Phi)=\exp\left[i(\mathbf{kr})-i\omega t\right], \quad (77.3)$$

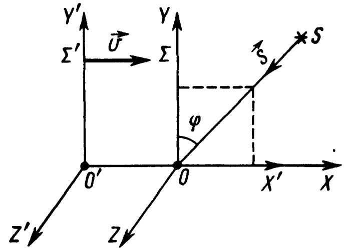

Рис. 77.3

где $\mathbf{k}=\mathbf{s}\omega/c$ — волновой вектор. Согласно принципу относительности, уравнение поверхности волнового фронта $d\Phi=0$ ковариантно относительно преобразований Лоренца. Это означает, что левая часть уравнения, т. е. фаза Φ, представляет собой некоторый 4-тензор. Но единственным 4-тензором с одной компонентой является 4-скаляр, поэтому фаза Φ должна быть релятивистским скаляром. Ее действительно можно представить в виде скаляра

$$\Phi=\omega t-(\mathbf{kr})=k_\mu x^\mu, \quad (77.4)$$

если ввести волновой 4-вектор

$$k^\mu=(\omega/c,\ \omega\mathbf{s}/c), \quad (77.5)$$

важным свойством которого является *изотропность*:

$$k^2=k_\mu k^\mu=0. \quad (77.6)$$

Получим теперь компоненты 4-вектора k'^μ в системе отсчета Σ'. Очевидно, в системе Σ

$$\mathbf{k}=(-k^0\sin\varphi,\ -k^0\cos\varphi,\ 0);\ k^0=\omega/c,$$

и преобразованием Лоренца получаем:

$$k'^0=\gamma(k^0-\beta k^1),\ k'^1=\gamma(k^1-\beta k^0),\ k'^2=k^2,\ k'^3=k^3. \quad (77.7)$$

Так как в системе Σ'

$$\mathbf{k}'=(-k'^0\sin\varphi',\ -k'^0\cos\varphi',\ 0);\ k'^0=\omega'/c,$$

то из (77.7) находим

$$\omega'=\omega\gamma(1+\beta\sin\varphi),\quad \sin\varphi'=(\beta+\sin\varphi)/(1+\beta\sin\varphi). \quad (77.8)$$

Эти общие формулы и дают объединенное описание аберрации и эффекта Доплера. В частности, при $\varphi=0$ получаем чистую аберрацию, а при $\varphi=\pi/2$ — чистый эффект Доплера (продольный). Так, при $\varphi=0$

$$\sin\varphi'=\beta,\quad \omega'=\omega\gamma=\omega(1-\beta^2)^{-1/2}. \quad (77.9)$$

Видно, что релятивистский угол аберрации $\varphi'=\arcsin\beta$ отличается от угла аберрации $\operatorname{arctg}\beta$ в «эфирной» теории. Совпадение получается лишь для малых скоростей $v\ll c$. Другим важным отличием релятивистской аберрации от классической является изменение частоты света $\omega' = \omega\gamma$, часто называемое *поперечным эффектом Доплера.*

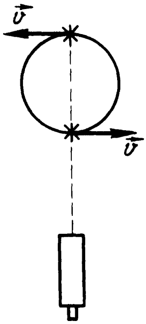

Рис. 77.4

Задача 77.1. *Показать, что в «эфирной» теории получается правильный угол аберрации, если учесть сокращение Лоренца — Фицджеральда.*

Задача 77.2. *Источник света движется относительно наблюдателя со скоростью* **v**. *Как связаны между собой видимое и истинное положения источника? Рассмотреть случай двойной звезды, неподвижной относительно наблюдателя и вращающейся с некоторой угловой скоростью* (рис. 77.4). *Можно ли утверждать, что в соответствии с формулой* (77.8) *в том положении, когда компоненты звезды находятся на одной линии с наблюдателем* ($\varphi = 0$), *они будут казаться пространственно разделенными?*

Для описания релятивистского эффекта Доплера предположим в (77.8) $\varphi = \pi/2$ и найдем

$$\varphi' = \pi/2, \quad \omega' = \omega\gamma\left(1 + \beta\right) = \omega\sqrt{(c+v)/(c-v)}\,. \tag{77.10}$$

Очевидно, что релятивистская формула для продольного эффекта Доплера совпадает с классической формулой (77.2) лишь в пределе медленных движений.

Задача 77.3. *Найти закон отражения света от движущегося зеркала, скорость* **v** *которого ориентирована произвольно относительно зеркала.*

Задача 77.4. *Описать аберрацию и эффект Доплера для света в прозрачной среде с показателем преломления* $n(\omega)$. *Найти поправку к коэффициенту увлечения Френеля, обусловленную эффектом Доплера.*

Задача 77.5. *Описать аберрацию и эффект Доплера для полей* $\psi^{\pm}(x)$, *подчиняющихся уравнениям* $(\Box \mp m^2)\psi^{\pm} = 0$.