7
ГЛАВА

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этой главе мы дадим ковариантную формулировку уравнений Максвелла и изучим движение точечной заряженной частицы в электромагнитном поле. Последовательно распространяя принцип относительности на те или иные физические явления, т. е. придавая соответствующим уравнениям ковариантный вид, можно убедиться, что различные физические величины, которые в трехмерной формулировке теории выступали как независимые, теперь оказываются объединенными в самостоятельные структуры (четырехмерные тензоры), поскольку при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую они взаимно преобразуются. Наглядная геометрическая интерпретация теории относительности, предложенная Минковским, оказалась чрезвычайно плодотворной при построении релятивистской формы уравнений динамики материальных частиц, в том числе с учетом силы реакции излучения.

§ 78. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА В КОВАРИАНТНОЙ ФОРМЕ

Ковариантность какого-либо закона природы по отношению к преобразованиям Лоренца, очевидно, соблюдается, если этот закон удается представить в виде системы четырехмерных тензорных уравнений. Попробуем представить в явно ковариантной форме уравнения Максвелла в вакууме:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho,\\ &\operatorname{rot}\mathbf{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\end{aligned}\right.\ \text{(I)}\qquad \left.\begin{aligned}&\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0.\end{aligned}\right.\ \text{(II)}\qquad (78.1)$$

Но сначала обратим внимание на то, что из уравнений (78.1) вытекает уравнение непрерывности

$$\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\mathbf{j}=0, \qquad (78.2)$$

выражающее закон сохранения электрического заряда. Этот закон универсален, т. е. выполняется в любой инерциальной системе отсчета, и поэтому уравнение (78.2) должно быть лоренц-ковариантным. Это возможно лишь в случае, когда его левая часть является релятивистским скаляром. Такое представление

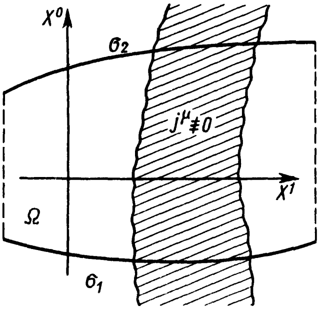

Рис. 78.1

левой части (78.2) оказывается действительно возможным, если ввести 4-вектор плотности тока j с компонентами*

$$j^\mu=(c\rho, \mathbf{j});\quad c\rho\equiv j^0. \tag{78.3}$$

Тогда уравнение (78.2) принимает вид

$$\partial_\mu j^\mu=0, \tag{78.4}$$

т. е. его левая часть является четырехмерной дивергенцией.

Закон сохранения электрического заряда можно записать и в интегральной форме, если проинтегрировать (78.4) по некоторому 4-объему Ω, окруженному замкнутой гиперповерхностью σ, и использовать четырехмерную теорему Гаусса—Остроградского (74.14):

$$\int_\Omega \partial_\mu j^\mu d\Omega=\oint_\sigma j^\mu d\sigma_\mu=0. \tag{78.5}$$

Предположим теперь, что заряды и токи, как это обычно имеет место, сосредоточены в некоторой ограниченной области пространства. Тогда в качестве четырехмерной области Ω можно взять 4-объем, заключенный между двумя пространственноподобными гиперповерхностями σ_1 и σ_2 (рис. 78.1). Поскольку вклад бесконечно удаленных областей в интеграл (78.5) будет исчезающим, равенство (78.5) примет вид

$$\int_{\sigma_2} j^\mu d\sigma_\mu=\int_{\sigma_1} j^\mu d\sigma_\mu. \tag{78.6}$$

Оно означает, что инвариантный интеграл

$$Q[\sigma]=\frac{1}{c}\int_\sigma j^\mu d\sigma_\mu=\frac{1}{c}\int_\sigma n_\mu j^\mu d\sigma \tag{78.7}$$

оказывается не зависящим от выбора пространственноподобной гиперповерхности σ. Поэтому в качестве последней можно, например, выбрать гиперповерхность $x^0=\mathrm{const}$, для которой вектор нормали имеет компоненты $n_\mu=(1, 0, 0, 0)$, поэтому $d\sigma_\mu=(dV, 0, 0, 0)$. Тогда равенство (78.7) принимает вид

$$Q=\int \rho dV=\mathrm{const} \tag{78.8}$$

(интегральный закон сохранения электрического заряда).

Из структуры 4-вектора плотности тока $j^\mu=(c\rho, \mathbf{j})$ нетрудно вывести закон преобразования плотностей заряда ρ и тока $\mathbf{j}$ при преобразованиях Лоренца (67.18):

---

* Здесь еще раз проявляется присущая теории относительности тенденция к объединению компонент различных трехмерных тензоров в один четырехмерный тензор. Эту тенденцию мы неоднократно будем наблюдать и в дальнейшем.

$$\rho=\gamma(\rho'+j'^1 v/c^2),\ j^1=\gamma(j'^1+\rho' v),$$
$$j^2=j'^2,\ j^3=j'^3. \qquad (78.9)$$

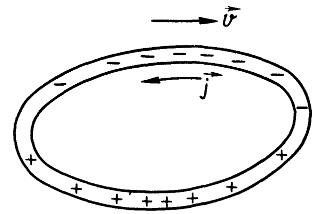

Рис. 78.2

В частности, если в системе отсчета Σ' заряды были неподвижны и распределены с некоторой плотностью ρ', то $j'^\mu=(c\rho', 0, 0, 0)$ и поэтому в системе Σ, относительно которой заряды движутся со скоростью v вдоль оси X, согласно (78.9), имеем

$$\rho=\gamma\rho',\ \mathbf{j}=\gamma\rho'\mathbf{v}=\rho\mathbf{v}. \qquad (78.10)$$

Таким образом, появляется конвекционный ток с плотностью $\rho\mathbf{v}$ и вследствие лоренцева сокращения масштабов в направлении движения происходит увеличение плотности заряда.

В другом частном случае, когда в системе отсчета Σ' имелась лишь плотность тока $\mathbf{j}\neq 0$, а плотность заряда была равна нулю, т. е. $j^\mu=(0, \mathbf{j}')$, в системе Σ найдем:

$$j^1=\gamma j'^1,\ j^2=j'^2,\ j^3=j'^3,\ \rho=j'^1\gamma v/c^2=j^1 v/c^2. \qquad (78.11)$$

Если увеличение плотности тока можно объяснить тем же лоренцевым сокращением масштабов, приводящим к уплотнению движущихся зарядов, то появление некоторой плотности заряда ρ представляется на первый взгляд парадоксальным и противоречащим закону сохранения заряда. Однако на самом деле никакого противоречия здесь нет. Действительно, если $\rho'=0$ в системе Σ', то из уравнения непрерывности (78.2) следует, что $\operatorname{div}'\mathbf{j}'=0$, т. е. токи должны быть замкнутыми (рис. 78.2). Поэтому, если проводник с током привести в поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}$, то согласно (78.11) на участках с противоположными токами возникнут и противоположные плотности заряда*. При этом результирующий заряд Q в проводе, очевидно, равен нулю, что следует уже из инвариантности заряда:

$$Q=\int\rho\,\mathrm{d}V=Q'=\int\rho'\,\mathrm{d}V'=0.$$

Задача 78.1. *Вычислить электрический и магнитный дипольные моменты плоского линейного кругового тока I радиуса a, перемещающегося со скоростью* $\mathbf{v}$.

§ 79. КОВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Так как в уравнения Максвелла (78.1) кроме источников ρ и $\mathbf{j}$, образующих 4-вектор, входят только векторы электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, то лоренц-ковариантность уравнений (78.1) может лишь означать, что пара векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при преобразованиях Лоренца выражается сама через себя. Иначе говоря, векторы

---

* См. задачу **6.2**.