$$\rho=\gamma\left(\rho'+j'^1 v/c^2\right),\ j^1=\gamma\left(j'^1+\rho' v\right),$$
$$j^2=j'^2,\ j^3=j'^3. \tag{78.9}$$

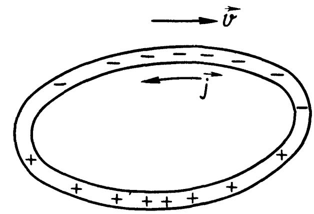

Рис. 78.2

В частности, если в системе отсчета Σ' заряды были неподвижны и распределены с некоторой плотностью ρ', то $j'^{\mu}=(c\rho', 0, 0, 0)$ и поэтому в системе Σ, относительно которой заряды движутся со скоростью v вдоль оси X, согласно (78.9), имеем

$$\rho=\gamma\rho',\ \mathbf{j}=\gamma\rho'\mathbf{v}=\rho\mathbf{v}. \tag{78.10}$$

Таким образом, появляется конвекционный ток с плотностью $\rho\mathbf{v}$ и вследствие лоренцева сокращения масштабов в направлении движения происходит увеличение плотности заряда.

В другом частном случае, когда в системе отсчета Σ' имелась лишь плотность тока $\mathbf{j}\neq 0$, а плотность заряда была равна нулю, т. е. $j^{\mu}=(0, \mathbf{j}')$, в системе Σ найдем:

$$j^1=\gamma j'^1,\ j^2=j'^2,\ j^3=j'^3,\ \rho=j'^1\gamma v/c^2=j^1 v/c^2. \tag{78.11}$$

Если увеличение плотности тока можно объяснить тем же лоренцевым сокращением масштабов, приводящим к уплотнению движущихся зарядов, то появление некоторой плотности заряда ρ представляется на первый взгляд парадоксальным и противоречащим закону сохранения заряда. Однако на самом деле никакого противоречия здесь нет. Действительно, если $\rho'=0$ в системе Σ', то из уравнения непрерывности (78.2) следует, что $\mathrm{div}'\mathbf{j}'=0$, т. е. токи должны быть замкнутыми (рис. 78.2). Поэтому, если проводник с током привести в поступательное движение со скоростью $\mathbf{v}$, то согласно (78.11) на участках с противоположными токами возникнут и противоположные плотности заряда*. При этом результирующий заряд Q в проводе, очевидно, равен нулю, что следует уже из инвариантности заряда:

$$Q=\int\rho\mathrm{d}V=Q'=\int\rho'\mathrm{d}V'=0.$$

Задача 78.1. *Вычислить электрический и магнитный дипольные моменты плоского линейного кругового тока I радиуса a, перемещающегося со скоростью* $\mathbf{v}$.

§ 79. КОВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Так как в уравнения Максвелла (78.1) кроме источников ρ и $\mathbf{j}$, образующих 4-вектор, входят только векторы электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, то лоренц-ковариантность уравнений (78.1) может лишь означать, что пара векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при преобразованиях Лоренца выражается сама через себя. Иначе говоря, векторы

* См. задачу **6.2**.

электромагнитного поля являются компонентами некоторого четырехмерного тензора. Единственным 4-тензором с шестью компонентами является антисимметричный тензор второго ранга. Обозначая компоненты этого тензора $F^{\mu\nu}$, попытаемся определить его структуру, приведя к явно ковариантной форме левые части уравнений (78.1).

Начнем с первой группы уравнений Максвелла. Для удобства запишем их в декартовых координатах*:

$$\begin{aligned}
0+\partial_1 E_1+\partial_2 E_2+\partial_3 E_3&=(4\pi/c)j^0,\\
-\partial_0 E_1+0+\partial_2 B_3-\partial_3 B_2&=(4\pi/c)j^1,\\
-\partial_0 E_2-\partial_1 B_3+0+\partial_3 B_1&=(4\pi/c)j^2,\\
-\partial_0 E_3+\partial_1 B_2-\partial_2 B_1+0&=(4\pi/c)j^3.
\end{aligned} \tag{79.1}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (79.1) можно представить в четырехмерной форме:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=4\pi j^\nu/c. \tag{79.2}$$

При этом контравариантные компоненты тензора $F^{\mu\nu}$, обычно называемого *тензором электромагнитного поля*, изображаются антисимметричной матрицей

$$F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}=\left\|\begin{matrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3\\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2\\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1\\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0\end{matrix}\right\|. \tag{79.3}$$

Что касается второй группы уравнений Максвелла, то, предварительно записав их в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}
0+\partial_1 B_1+\partial_2 B_2+\partial_3 B_3&=0,\\
-\partial_0 B_1+0-\partial_2 E_3+\partial_3 E_2&=0,\\
-\partial_0 B_2+\partial_1 E_3+0-\partial_3 E_1&=0,\\
-\partial_0 B_3-\partial_1 E_2+\partial_2 E_1+0&=0,
\end{aligned}$$

убеждаемся, что они допускают ковариантное представление:

$$\partial_\mu \tilde F^{\mu\nu}=0, \tag{79.4}$$

где компоненты тензора $\tilde F^{\mu\nu}$ изображаются антисимметричной матрицей

$$\tilde F^{\mu\nu}=-\tilde F^{\nu\mu}=\left\|\begin{matrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3\\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2\\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1\\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0\end{matrix}\right\|. \tag{79.5}$$

---

* Напомним, что у трехмерных векторов **E**, **B** ковариантные и контравариантные компоненты совпадают, т е $E_i=E^i$ и $B_i=B^i$.

Легко проверить, что тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ является дуально сопряженным тензору $F^{\mu\nu}$, т. е. связан с ним соотношением

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau}/2, \tag{79.6}$$

и поэтому (79.4) можно переписать и как уравнения для $F_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0. \tag{79.7}$$

Задача 79.1. *Убедиться в эквивалентности уравнений* (79 7) *и* (79.4).

Итак, ковариантная запись уравнений электродинамики Максвелла в вакууме дается системой уравнений (79.2) и (79.7).

§ 80. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для получения формул преобразования векторов **E** и **B** электромагнитного поля при переходе к движущейся системе отсчета можно, безусловно, воспользоваться законом преобразования компонент тензора $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau F^{\sigma\tau}.$$

Однако существует и более короткий путь, основанный на использовании свойства антисимметрии тензора электромагнитного поля. Заметим прежде всего, что компонента тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$ преобразуется как произведение соответствующих компонент двух 4-векторов $A^\mu B^\nu$. Поэтому если направить ось X вдоль скорости движущейся системы отсчета **v**, то вследствие инвариантности поперечных компонент 4-вектора A^2 и A^3 компоненты $F^{2\nu}$ и $F^{3\nu}$ должны преобразовываться как 4-векторы. Это обстоятельство с учетом свойства антисимметрии $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ позволяет установить закон преобразования всех компонент тензора $F^{\mu\nu}$, кроме F^{01}. Однако [см. (79.6)] $-F^{01} = \tilde{F}^{23}$, т. е. F^{01} преобразуется как инвариантная составляющая дуально сопряженного тензора $\tilde{F}^{23}$. Учитывая все сказанное, можно записать следующие формулы преобразования для тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} &F'^{01} = F^{01}, \quad F'^{02} = \gamma(F^{02} - \beta F^{12}), \quad F'^{03} = \gamma(F^{03} - \beta F^{13}), \\ &F'^{23} = F^{23}, \quad F'^{12} = \gamma(F^{12} - \beta F^{02}), \quad F'^{13} = \gamma(F^{13} - \beta F^{03}), \end{aligned} \tag{80.1}$$

или с учетом (79.3):

$$\begin{aligned} &E'_1 = E_1, \quad E'_2 = \gamma(E_2 - \beta B_3), \quad E'_3 = \gamma(E_3 + \beta B_2), \\ &B'_1 = B_1, \quad B'_2 = \gamma(B_2 + \beta E_3), \quad B'_3 = \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \tag{80.2}$$

Эти формулы можно записать и в компактной векторной форме:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel, \quad \mathbf{E}'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + [\mathbf{vB}]/c), \\ &\mathbf{B}'_\parallel = \mathbf{B}_\parallel, \quad \mathbf{B}'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - [\mathbf{vE}]/c), \end{aligned} \tag{80.3}$$