Легко проверить, что тензор $\tilde{F}^{\mu\nu}$ является дуально сопряженным тензору $F^{\mu\nu}$, т. е. связан с ним соотношением

$$\tilde{F}^{\mu\nu}=\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}/2, \tag{79.6}$$

и поэтому (79.4) можно переписать и как уравнения для $F_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu F_{\nu\sigma}+\partial_\nu F_{\sigma\mu}+\partial_\sigma F_{\mu\nu}=0. \tag{79.7}$$

Задача 79.1. *Убедиться в эквивалентности уравнений* (79 7) *и* (79.4).

Итак, ковариантная запись уравнений электродинамики Максвелла в вакууме дается системой уравнений (79.2) и (79.7).

§ 80. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Для получения формул преобразования векторов **E** и **B** электромагнитного поля при переходе к движущейся системе отсчета можно, безусловно, воспользоваться законом преобразования компонент тензора $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu}=\Lambda^\mu_\sigma\Lambda^\nu_\tau F^{\sigma\tau}.$$

Однако существует и более короткий путь, основанный на использовании свойства антисимметрии тензора электромагнитного поля. Заметим прежде всего, что компонента тензора второго ранга $F^{\mu\nu}$ преобразуется как произведение соответствующих компонент двух 4-векторов $A^\mu B^\nu$. Поэтому если направить ось X вдоль скорости движущейся системы отсчета **v**, то вследствие инвариантности поперечных компонент 4-вектора A^2 и A^3 компоненты $F^{2\nu}$ и $F^{3\nu}$ должны преобразовываться как 4-векторы. Это обстоятельство с учетом свойства антисимметрии $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$ позволяет установить закон преобразования всех компонент тензора $F^{\mu\nu}$, кроме F^{01}. Однако [см. (79.6)] $-F^{01}=\tilde{F}^{23}$, т. е. F^{01} преобразуется как инвариантная составляющая дуально сопряженного тензора $\tilde{F}^{23}$. Учитывая все сказанное, можно записать следующие формулы преобразования для тензора электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} &F'^{01}=F^{01},\quad F'^{02}=\gamma(F^{02}-\beta F^{12}),\quad F'^{03}=\gamma(F^{03}-\beta F^{13}),\\ &F'^{23}=F^{23},\quad F'^{12}=\gamma(F^{12}-\beta F^{02}),\quad F'^{13}=\gamma(F^{13}-\beta F^{03}),\end{aligned} \tag{80.1}$$

или с учетом (79.3):

$$\begin{aligned} &E'_1=E_1,\quad E'_2=\gamma(E_2-\beta B_3),\quad E'_3=\gamma(E_3+\beta B_2),\\ &B'_1=B_1,\quad B'_2=\gamma(B_2+\beta E_3),\quad B'_3=\gamma(B_3-\beta E_2).\end{aligned} \tag{80.2}$$

Эти формулы можно записать и в компактной векторной форме:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}'_\parallel=\mathbf{E}_\parallel,\quad \mathbf{E}'_\perp=\gamma(\mathbf{E}_\perp+[\mathbf{vB}]/c),\\ &\mathbf{B}'_\parallel=\mathbf{B}_\parallel,\quad \mathbf{B}'_\perp=\gamma(\mathbf{B}_\perp-[\mathbf{vE}]/c),\end{aligned} \tag{80.3}$$

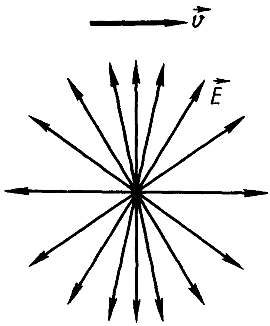

Рис. 80.1

где символами $\|$ и $\perp$ обозначены соответственно продольная и поперечная составляющие векторов. Обратные преобразования, очевидно, получаются заменой $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$.

В полученных законах преобразования (80.3) отчетливо выявляется тесная взаимосвязь и глубокое внутреннее единство электрического и магнитного полей, выступающих как различные проявления единого электромагнитного поля. В частности, одним из ярких свидетельств этого единства являются уже известные нам теоремы Дж. Дж. Томсона, (см. задачу **6.2**), вытекающие из (80.3). Так, если в движущейся системе отсчета Σ' имеется только магнитное поле $\mathbf{B}'$, то в неподвижной системе Σ, согласно (80.3), появится поперечное электрическое поле $\mathbf{E} = -[\mathbf{vB}]/c$. Аналогично, если в системе Σ' имеется лишь электрическое поле $\mathbf{E}'$, то в системе Σ появится поперечное магнитное поле $\mathbf{B} = [\mathbf{vE}]/c$.

В качестве важного применения формул (80.3) рассмотрим задачу о нахождении электромагнитного поля, создаваемого точечным зарядом e, движущимся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Очевидно, что в собственной системе отсчета Σ' заряда имеется лишь электрическое поле с напряженностью

$$\mathbf{E}' = e\mathbf{r}'/r'^3. \tag{80.4}$$

Применив формулы преобразования, обратные (80.3) и предварительно записанные в компактной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (1-\gamma)\mathbf{v}(\mathbf{vE}')/v^2 + \gamma(\mathbf{E}' - [\mathbf{vB}']/c), \\ \mathbf{B} &= (1-\gamma)\mathbf{v}(\mathbf{vB}')/v^2 + \gamma(\mathbf{B}' + [\mathbf{vE}']/c), \end{aligned} \tag{80.5}$$

найдем, что в неподвижной системе Σ

$$\mathbf{E} = \gamma\mathbf{E}' + (1-\gamma)\mathbf{v}(\mathbf{vE}')/v^2, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{vE}]/c. \tag{80.6}$$

Подставляя (80.4) в (80.6) и учитывая, что, согласно (67.20),

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + (\gamma - 1)(\mathbf{rv})\mathbf{v}/v^2,$$

после несложных преобразований находим

$$\mathbf{E} = \gamma\frac{e}{r'^3}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \frac{e(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)(1-\beta^2)}{[(x-vt)^2 + (y^2+z^2)(1-\beta^2)]^{3/2}}. \tag{80.7}$$

Анализ этой формулы показывает, что при больших скоростях v, когда $\beta \approx 1$, поле практически концентрируется в плоскости, перпендикулярной движению (рис. 80.1). Показателем релятивистского сжатия поля является отношение

$$E(x - vt = a,\ y = z = 0)/E(x - vt = 0,\ y = z = a/\sqrt{2}) = (1-\beta^2)^{3/2}.$$

Задача 80.1. *Металлический шарик радиуса a и заряда e движется с постоянной скоростью* $\mathbf{v}$. *Показать, что сила Лоренца, действующая на элементарный заряд на поверхности шарика, может быть представлена в виде* $\mathbf{F}=-\nabla\psi$, где ψ — *конвекционный потенциал. Найти форму эквипотенциальной поверхности* $\psi=\text{const}$ (*эллипсоид Хевисайда*).

Задача 80.2. *Найти электромагнитное поле точечного электрического диполя с моментом* $\mathbf{p}$, *движущегося с постоянной скоростью* $\mathbf{v}$.

§ 81. ИНВАРИАНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Во многих приложениях неоценимую пользу может оказать знание инвариантных комбинаций, составленных из компонент электромагнитного поля. Можно указать две такие инвариантные комбинации

$$\mathscr{I}_1=-F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2, \quad \mathscr{I}_2=-F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}/4, \tag{81.1}$$

в которых для удобства выбраны числовые коэффициенты $-{}^1/_2$ и $-{}^1/_4$. Воспользовавшись матричными представлениями (79.3) и (79.5) для тензоров $F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ электромагнитного поля, инварианты (81.1) можно выразить через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathscr{I}_1=E^2-B^2, \quad \mathscr{I}_2=(\mathbf{EB}). \tag{81.2}$$

Отметим, что, согласно (81.1), только $\mathscr{I}_1$ является истинным скаляром, тогда как $\mathscr{I}_2$ является псевдоскаляром, т. е. изменяет знак при пространственном отражении.

Задача 81.1. *Показать, что характеристические числа матрицы* $F^{\mu}_{\ \nu}$ *выражаются через инварианты* (81.2).

Из существования инвариантов (81.2) можно вывести ряд полезных свойств электромагнитного поля. Например, из явного вида $\mathscr{I}_1$ следует, что с помощью преобразования Лоренца нельзя перевести чисто магнитное поле в чисто электрическое, и наоборот. Это связано с тем, что инвариант $\mathscr{I}_1$ изменил бы при этом знак, что невозможно. Далее, из явного вида инварианта $\mathscr{I}_2$ вытекает, что если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ ортогональны в некоторой системе отсчета, т. е. $\mathscr{I}_2=0$, то и в любой другой системе отсчета они будут оставаться ортогональными. Таким образом, свойство ортогональности векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ является инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Интересной особенностью обладает плоская электромагнитная волна. Так как для нее $E=B$ и $(\mathbf{EB})=0$, то $\mathscr{I}_1=\mathscr{I}_2=0$. Поэтому в любой инерциальной системе отсчета плоская электромагнитная волна остается плоской волной.

Задача 81.2. *Каким условиям должны удовлетворять векторы* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{B}$, *чтобы существовала система отсчета, в которой либо* $\mathbf{E}=0$, *либо* $\mathbf{B}=0$?