Задача 80.1. *Металлический шарик радиуса a и заряда e движется с постоянной скоростью* $\mathbf{v}$. *Показать, что сила Лоренца, действующая на элементарный заряд на поверхности шарика, может быть представлена в виде* $\mathbf{F}=-\nabla\psi$, где ψ — *конвекционный потенциал. Найти форму эквипотенциальной поверхности* $\psi=\text{const}$ (*эллипсоид Хевисайда*).

Задача 80.2. *Найти электромагнитное поле точечного электрического диполя с моментом* $\mathbf{p}$, *движущегося с постоянной скоростью* $\mathbf{v}$.

§ 81. ИНВАРИАНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Во многих приложениях неоценимую пользу может оказать знание инвариантных комбинаций, составленных из компонент электромагнитного поля. Можно указать две такие инвариантные комбинации

$$\mathscr{I}_1=-F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}/2,\quad \mathscr{I}_2=-F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}/4, \tag{81.1}$$

в которых для удобства выбраны числовые коэффициенты $-{}^1/_2$ и $-{}^1/_4$. Воспользовавшись матричными представлениями (79.3) и (79.5) для тензоров $F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ электромагнитного поля, инварианты (81.1) можно выразить через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathscr{I}_1=E^2-B^2,\quad \mathscr{I}_2=(\mathbf{EB}). \tag{81.2}$$

Отметим, что, согласно (81.1), только $\mathscr{I}_1$ является истинным скаляром, тогда как $\mathscr{I}_2$ является псевдоскаляром, т. е. изменяет знак при пространственном отражении.

Задача 81.1. *Показать, что характеристические числа матрицы* F^{μ}_{ν} *выражаются через инварианты* (81.2).

Из существования инвариантов (81.2) можно вывести ряд полезных свойств электромагнитного поля. Например, из явного вида $\mathscr{I}_1$ следует, что с помощью преобразования Лоренца нельзя перевести чисто магнитное поле в чисто электрическое, и наоборот. Это связано с тем, что инвариант $\mathscr{I}_1$ изменил бы при этом знак, что невозможно. Далее, из явного вида инварианта $\mathscr{I}_2$ вытекает, что если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ ортогональны в некоторой системе отсчета, т. е. $\mathscr{I}_2=0$, то и в любой другой системе отсчета они будут оставаться ортогональными. Таким образом, свойство ортогональности векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ является инвариантным относительно преобразований Лоренца.

Интересной особенностью обладает плоская электромагнитная волна. Так как для нее $E=B$ и $(\mathbf{EB})=0$, то $\mathscr{I}_1=\mathscr{I}_2=0$. Поэтому в любой инерциальной системе отсчета плоская электромагнитная волна остается плоской волной.

Задача 81.2. *Каким условиям должны удовлетворять векторы* $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{B}$, *чтобы существовала система отсчета, в которой либо* $\mathbf{E}=0$, *либо* $\mathbf{B}=0$?

Существует и другой способ вывода инвариантов (81.2), основанный на использовании формул преобразования электромагнитного поля (80.3) и позволяющий просто установить отсутствие других инвариантов, кроме $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$. Именно: применим формулы (80.3) к комплексному вектору

$$\mathbf{X}=\mathbf{E}+i\mathbf{B}, \tag{81.3}$$

впервые введенному английским физиком *Л. Зильберштейном* в 1907 г. Тогда для преобразованного вектора $\mathbf{X}'$ найдем

$$\mathbf{X}'_{\|}=\mathbf{X}_{\|},\quad \mathbf{X}'_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{X}_{\perp}-i\left[\mathbf{v}\mathbf{X}\right]/c\right). \tag{81.4}$$

Воспользуемся теперь комплексным представлением (72.9) для гиперболического поворота, положив

$$\gamma=\cos\alpha,\quad i\gamma\beta=\sin\alpha,\quad \alpha=i\,\mathrm{arth}\,\beta.$$

Тогда формулы (81.4) примут вид

$$\mathbf{X}'_{\|}=\mathbf{X}_{\|},\quad \mathbf{X}'_{\perp}=\cos\alpha\,\mathbf{X}_{\perp}-\sin\alpha\left[\mathbf{v}\mathbf{X}\right]/v. \tag{81.5}$$

Нетрудно видеть, что преобразование (81.5) представляет собой трехмерный поворот вокруг направления $\mathbf{v}$, при котором, как известно, квадрат вектора остается неизменным, т. е.

$$\mathbf{X}'^2=\mathbf{X}^2=\mathrm{inv},$$

или

$$(\mathbf{E}+i\mathbf{B})^2=E^2-B^2+2i(\mathbf{B}\mathbf{E})=\mathrm{inv}. \tag{81.6}$$

Разделяя в (81.6) действительную и мнимую части, убеждаемся, что существуют только два независимых инварианта (81.2) электромагнитного поля.

§ 82. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

По аналогии с введением трехмерных скалярного φ и векторного $\mathbf{A}$ потенциалов электромагнитного поля, для решения системы уравнений Максвелла в четырехмерной форме удобно ввести четырехмерный векторный потенциал A электромагнитного поля, положив

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \tag{82.1}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (82.1) является ковариантной записью соответствующих трехмерных уравнений $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, если считать, что 4-потенциал A имеет компоненты

$$A^\mu=(\varphi,\ \mathbf{A}). \tag{82.2}$$

Заметим, что подстановкой (82.1) автоматически удовлетворяется вторая группа уравнений Максвелла. В самом деле,

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}=\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\partial_\mu\left(\partial_\sigma A_\tau-\partial_\tau A_\sigma\right)/2\equiv 0$$

как свертка антисимметричного тензора $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ с симметричными тензорами $\partial_\mu\partial_\sigma A_\tau$ и $\partial_\mu\partial_\tau A_\sigma$.

Обратим внимание на то, что соотношением (82.1) 4-потенциал A определен неоднозначно, а именно: новый 4-потенциал с компонентами

$$\mathscr{A}_\mu\equiv A_\mu+\partial_\mu\Phi, \tag{82.3}$$