Существует и другой способ вывода инвариантов (81.2), основанный на использовании формул преобразования электромагнитного поля (80.3) и позволяющий просто установить отсутствие других инвариантов, кроме $\mathscr{I}_1$ и $\mathscr{I}_2$. Именно: применим формулы (80.3) к комплексному вектору

$$\mathbf{X}=\mathbf{E}+i\mathbf{B}, \tag{81.3}$$

впервые введенному английским физиком *Л. Зильберштейном* в 1907 г. Тогда для преобразованного вектора $\mathbf{X}'$ найдем

$$\mathbf{X}'_{\parallel}=\mathbf{X}_{\parallel}, \quad \mathbf{X}'_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{X}_{\perp}-i\left[\mathbf{vX}\right]/c\right). \tag{81.4}$$

Воспользуемся теперь комплексным представлением (72.9) для гиперболического поворота, положив

$$\gamma=\cos\alpha, \quad i\gamma\beta=\sin\alpha, \quad \alpha=i\,\mathrm{arth}\,\beta.$$

Тогда формулы (81.4) примут вид

$$\mathbf{X}'_{\parallel}=\mathbf{X}_{\parallel}, \quad \mathbf{X}'_{\perp}=\cos\alpha\,\mathbf{X}_{\perp}-\sin\alpha\left[\mathbf{vX}\right]/v. \tag{81.5}$$

Нетрудно видеть, что преобразование (81.5) представляет собой трехмерный поворот вокруг направления $\mathbf{v}$, при котором, как известно, квадрат вектора остается неизменным, т. е.

$$\mathbf{X}'^2=\mathbf{X}^2=\mathrm{inv},$$

или

$$\left(\mathbf{E}+i\mathbf{B}\right)^2=E^2-B^2+2i(\mathbf{BE})=\mathrm{inv}. \tag{81.6}$$

Разделяя в (81.6) действительную и мнимую части, убеждаемся, что существуют только два независимых инварианта (81.2) электромагнитного поля.

§ 82. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

По аналогии с введением трехмерных скалярного φ и векторного $\mathbf{A}$ потенциалов электромагнитного поля, для решения системы уравнений Максвелла в четырехмерной форме удобно ввести четырехмерный векторный потенциал A электромагнитного поля, положив

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu. \tag{82.1}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (82.1) является ковариантной записью соответствующих трехмерных уравнений $\mathbf{E}=-\nabla\varphi-c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, если считать, что 4-потенциал A имеет компоненты

$$A^\mu=(\varphi,\ \mathbf{A}). \tag{82.2}$$

Заметим, что подстановкой (82.1) автоматически удовлетворяется вторая группа уравнений Максвелла. В самом деле,

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu}=\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\partial_\mu\left(\partial_\sigma A_\tau-\partial_\tau A_\sigma\right)/2\equiv 0$$

как свертка антисимметричного тензора $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ с симметричными тензорами $\partial_\mu\partial_\sigma A_\tau$ и $\partial_\mu\partial_\tau A_\sigma$.

Обратим внимание на то, что соотношением (82.1) 4-потенциал A определен неоднозначно, а именно: новый 4-потенциал с компонентами

$$\mathscr{A}_\mu\equiv A_\mu+\partial_\mu\Phi, \tag{82.3}$$

отличающийся от старого на 4-градиент произвольного скаляра Φ, тоже удовлетворяет (82.1), поскольку

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=\partial_\mu\mathscr{A}_\nu-\partial_\nu\mathscr{A}_\mu.$$

Это свойство 4-потенциала является выражением *градиентной*, или *калибровочной*, *инвариантности* электромагнитного поля

$$\varphi'=\varphi+c^{-1}\partial\Phi/\partial t,\quad \mathbf{A}'=\mathbf{A}-\nabla\Phi.$$

Чтобы уменьшить произвольность выбора 4-потенциала, на него можно наложить некоторое дополнительное условие. Если считать это условие линейным и лоренц-ковариантным, то оно определяется однозначно и известно как *условие Лоренца*

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{A}\equiv\partial_\mu A^\mu=0. \tag{82.4}$$

Очевидно, ему всегда можно удовлетворить, совершив калибровочное преобразование (82.3) с подходящей скалярной функцией Φ. В самом деле, подстановка (82.3) в (82.4) дает

$$-\partial_\mu\partial^\mu\Phi\equiv\Box\Phi=-\partial_\mu\mathscr{A}^\mu,$$

т. е. скаляр Φ удовлетворяет неоднородному уравнению Даламбера, решение которого задается с точностью до произвольного решения Φ_0 свободного уравнения Даламбера $\Box\Phi_0=0$. Таким образом, даже при наложенном условии Лоренца (82.4) 4-потенциал A_μ остается определенным с точностью до 4-градиента $\partial_\mu\Phi_0$, где Φ_0 — скалярное решение уравнения Даламбера.

Перепишем теперь в терминах 4-потенциала первую группу уравнений Максвелла в вакууме. Подставляя (82.1) в (79.2), имеем

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=\partial_\mu\partial^\mu A^\nu-\partial_\mu\partial^\nu A^\mu=(4\pi/c)j^\nu,$$

или с учетом условия Лоренца (82.4)

$$\Box A^\mu=-(4\pi/c)j^\mu. \tag{82.5}$$

Очевидно, что уравнения (82.5) являются ковариантной записью трехмерных уравнений (41.8) для потенциалов электромагнитного поля:

$$\Box\varphi=-4\pi\rho,\quad \Box\mathbf{A}=-(4\pi/c)\mathbf{j}.$$

Задача 82.1. *Показать, что запаздывающее решение уравнений* (82.5) *может быть представлено в форме, ковариантной относительно ортохронных преобразований Лоренца*:

$$A^\mu(x)=\frac{2}{c}\int\theta(x^0-x'^0)\,\delta\left[(x-x')^2\right]j^\mu(x')\,d\Omega', \tag{82.6}$$

или в эквивалентной форме Конвея — Герглотца:

$$A^\mu(x)=\frac{i}{\pi c}\int\limits_C\frac{j^\mu(x')}{(x-x')^2}\,d\Omega', \tag{82.7}$$

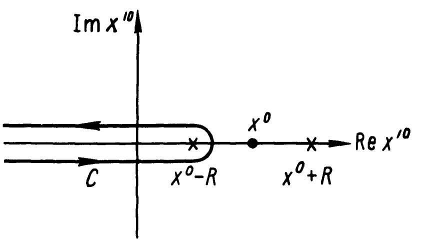

Рис. 82.1

где контур C в комплексной плоскости x'^0 изображен на рис. 82.1.

Задача 82.2. *Найти ковариантное представление для потенциалов Льенара — Вихерта.*

Задача 82.3. *Дать ковариантную формулировку метода векторов Герца.*

Задача 82.4. *Показать, что из* (82.1) *вытекает представление*

$$A_\alpha(x)=\partial_\alpha\Phi(x)+\int_0^1 x^\beta F_{\beta\alpha}(\lambda x)\lambda\,d\lambda.$$

§ 83. КОВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СРЕДЕ

При наличии среды, очевидно, изменится лишь первая группа уравнений Максвелла, содержащая плотности связанных зарядов и токов. Поэтому нам следует записать в ковариантной форме только уравнения связи между поляризованностью **P** и намагниченностью **M**, с одной стороны, и плотностями связанных зарядов $\rho^{\text{связ}}$ и токов $\mathbf{j}^{\text{связ}}$ — с другой. Как известно, эти уравнения имеют вид

$$\rho^{\text{связ}}=-\operatorname{div}\mathbf{P},\quad \mathbf{j}^{\text{связ}}=c\operatorname{rot}\mathbf{M}+\partial\mathbf{P}/\partial t. \tag{83.1}$$

Вводя 4-вектор плотности связанного тока $j^\mu_{\text{связ}}=(c\rho^{\text{связ}},\mathbf{j}^{\text{связ}})$ и антисимметричный *тензор поляризации — намагничения* $S^{\mu\nu}$, заданный матрицей

$$S^{\mu\nu}=\begin{Vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -M_3 & M_2 \\ -P_2 & M_3 & 0 & -M_1 \\ -P_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{83.2}$$

уравнения (83.1) можно переписать в явно ковариантной форме:

$$j^\nu_{\text{связ}}=c\partial_\mu S^{\mu\nu}. \tag{83.3}$$

Задача 83.1. *Показать, что диэлектрик с поляризованностью* **P**, *движущийся со скоростью* **v**, *приобретает намагниченность* $\mathbf{M}=[\mathbf{P}\mathbf{v}]/c$.

Так как электромагнитное поле в среде порождается плотностью полного 4-тока $j+j^{\text{связ}}$, то в соответствии с (79.2) имеем

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=(4\pi/c)(j^\nu+j^\nu_{\text{связ}}), \tag{83.4}$$

или с учетом (83.3)

$$\partial_\mu G^{\mu\nu}=(4\pi/c)j^\nu, \tag{83.5}$$