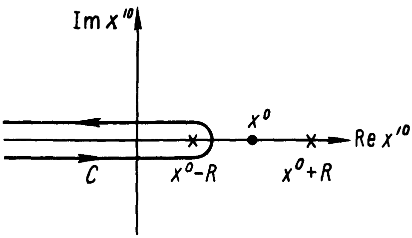

Рис. 82.1

где контур C в комплексной плоскости x'^0 изображен на рис. 82.1.

Задача 82.2. *Найти ковариантное представление для потенциалов Льенара — Вихерта.*

Задача 82.3. *Дать ковариантную формулировку метода векторов Герца.*

Задача 82.4. *Показать, что из* (82.1) *вытекает представление*

$$A_\alpha(x)=\partial_\alpha\Phi(x)+\int_0^1 x^\beta F_{\beta\alpha}(\lambda x)\lambda\,d\lambda.$$

§ 83. КОВАРИАНТНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СРЕДЕ

При наличии среды, очевидно, изменится лишь первая группа уравнений Максвелла, содержащая плотности связанных зарядов и токов. Поэтому нам следует записать в ковариантной форме только уравнения связи между поляризованностью $\mathbf{P}$ и намагниченностью $\mathbf{M}$, с одной стороны, и плотностями связанных зарядов $\rho^{\text{связ}}$ и токов $\mathbf{j}^{\text{связ}}$ — с другой. Как известно, эти уравнения имеют вид

$$\rho^{\text{связ}}=-\operatorname{div}\mathbf{P},\quad \mathbf{j}^{\text{связ}}=c\operatorname{rot}\mathbf{M}+\partial\mathbf{P}/\partial t. \tag{83.1}$$

Вводя 4-вектор плотности связанного тока $j^\mu_{\text{связ}}=(c\rho^{\text{связ}},\mathbf{j}^{\text{связ}})$ и антисимметричный *тензор поляризации — намагничения* $S^{\mu\nu}$, заданный матрицей

$$S^{\mu\nu}=\begin{Vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -M_3 & M_2 \\ -P_2 & M_3 & 0 & -M_1 \\ -P_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{83.2}$$

уравнения (83.1) можно переписать в явно ковариантной форме:

$$j^\nu_{\text{связ}}=c\partial_\mu S^{\mu\nu}. \tag{83.3}$$

Задача 83.1. *Показать, что диэлектрик с поляризованностью* $\mathbf{P}$, *движущийся со скоростью* $\mathbf{v}$, *приобретает намагниченность* $\mathbf{M}=[\mathbf{Pv}]/c$.

Так как электромагнитное поле в среде порождается плотностью полного 4-тока $j+j^{\text{связ}}$, то в соответствии с (79.2) имеем

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=(4\pi/c)(j^\nu+j^\nu_{\text{связ}}), \tag{83.4}$$

или с учетом (83.3)

$$\partial_\mu G^{\mu\nu}=(4\pi/c)j^\nu, \tag{83.5}$$

где введен новый антисимметричный тензор

$$G^{\mu\nu}=F^{\mu\nu}-4\pi S^{\mu\nu}. \tag{83.6}$$

Соотношение (83.6) представляет собой ковариантную запись известных трехмерных уравнений:

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}.$$

Поэтому структура тензора $G^{\mu\nu}$ задается следующей антисимметричной матрицей

$$G^{\mu\nu}=\begin{Vmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{83.7}$$

Предположим теперь, что нам известны трехмерные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$, входящие в феноменологические уравнения состояния неподвижного вещества (система отсчета Σ'):

$$D'^i=\varepsilon^i_k E'^k, \quad B'^i=\mu^i_k H'^k. \tag{83.8}$$

Очевидно, что этими уравнениями, записанными предварительно в ковариантной форме, и следует дополнить системы уравнений (83.5) и (79.7). Поскольку уравнения (83.8) задают линейную связь двух 4-тензоров $G^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$, их ковариантная запись должна иметь вид

$$G^{\mu\nu}=\lambda^{\mu\nu}_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}. \tag{83.9}$$

Введенный здесь 4-тензор проницаемостей $\lambda^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$, очевидно, антисимметричен по верхним и нижним индексам*. Чтобы выписать его компоненты в собственной системе вещества Σ', воспользуемся соотношениями, вытекающими из структуры тензоров $G^{\mu\nu}$ и $F^{\mu\nu}$:

$$G'^{0i}=-D'^i, \quad F'^{0i}=-E'^i, \quad G'^{ik}=-\varepsilon^{ikj}H'_j, \quad B'_i=-\varepsilon_{ikj}F'^{kj}/2. \tag{83.10}$$

С помощью (83.10) уравнения (83.8) можно представить в виде

$$G'^{0i}=\varepsilon^i_k F'^{0k}, \quad G'^{ik}=\varepsilon^{ikj}\varepsilon_{lmn}(\hat{\mu}^{-1})^l_j F^{mn}/2. \tag{83.11}$$

Сравнивая (83.11) с (83.9), находим следующую структуру тензора $\lambda'^{\mu\nu}_{\sigma\tau}$ в собственной системе Σ' среды:

$$\lambda'^{0i}_{0k}=\varepsilon^i_k/2; \quad \lambda'^{0i}_{kl}=\lambda'^{kl}_{0i}=0, \quad \lambda'^{ik}_{mn}=\varepsilon^{ikj}\varepsilon_{lmn}(\hat{\mu}^{-1})^l_j/2. \tag{83.12}$$

В частном случае изотропной среды, когда $\varepsilon^i_k=\varepsilon\delta^i_k$ и $\mu^i_k=\mu\delta^i_k$,

$$\lambda'^{0i}_{0k}=\varepsilon\delta^i_k/2, \quad \lambda'^{ik}_{mn}=\varepsilon^{ikj}\varepsilon_{jmn}/(2\mu)=(\delta^i_m\delta^k_n-\delta^i_n\delta^k_m)/(2\mu). \tag{83.13}$$

---

* Релятивистский тензор проницаемостей впервые был введен советским физиком *И. Е. Таммом.*

Переходя к системе отсчета Σ, относительно которой среда движется с некоторой скоростью $\mathbf{u}$, с помощью (83.12) или (83.13) всегда можно восстановить компоненты тензора $\lambda_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$ в системе Σ и записать, таким образом, уравнения Максвелла в среде в ковариантной форме:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu}=(4\pi/c)j^\nu,\quad G^{\mu\nu}=\lambda_{\sigma\tau}^{\mu\nu}F^{\sigma\tau},$$
$$\partial_\mu F_{\nu\sigma}+\partial_\nu F_{\sigma\mu}+\partial_\sigma F_{\mu\nu}=0. \tag{83.14}$$

В случае изотропной среды, как было впервые показано Минковским, уравнения связи (83.9) могут быть значительно упрощены. В самом деле, используя 4-скорость U среды, введем 4-векторы

$$E^\mu=F^{\mu\nu}U_\nu/c,\quad B^\mu=\tilde{F}^{\mu\nu}U_\nu/c,\quad D^\mu=G^{\mu\nu}U_\nu/c,\quad H^\mu=\tilde{G}^{\mu\nu}U_\nu/c,$$

обладающие тем свойством, что в собственной системе среды они сводятся соответственно к $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{H}'$, между которыми существует связь

$$\mathbf{B}'=\mu\mathbf{H}',\quad \mathbf{D}'=\varepsilon\mathbf{E}'.$$

Однако известно, что если два 4-вектора параллельны в некоторой системе отсчета, то они параллельны и в любой другой. Поэтому, вводя скалярные величины ε и μ, определяемые соответственно как диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в ее собственной системе отсчета, уравнения связи (83.9) можно заменить следующей парой уравнений:

$$D^\alpha=\varepsilon E^\alpha,\quad B^\alpha=\mu H^\alpha,$$

или

$$G^{\alpha\beta}U_\beta=\varepsilon F^{\alpha\beta}U_\beta,\quad \tilde{F}^{\alpha\beta}U_\beta=\mu\tilde{G}^{\alpha\beta}U_\beta. \tag{83.15}$$

Уравнения (83.15) известны как *уравнения Минковского для движущихся сред*. В трехмерной форме они принимают такой вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}+[\mathbf{uH}]/c&=\varepsilon(\mathbf{E}+[\mathbf{uB}]/c),\\ \mathbf{B}-[\mathbf{uE}]/c&=\mu(\mathbf{H}-[\mathbf{uD}]/c).\end{aligned} \tag{83.16}$$

Задача 83.2. *Показать, что из уравнений Минковского* (83.15) *вытекают следующие соотношения между тензорами* $G^{\alpha\beta}$ и $F^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}(G^{\alpha\beta}-\varepsilon F^{\alpha\beta})(\tilde{G}_{\alpha\beta}-\varepsilon\tilde{F}_{\alpha\beta})&=(F^{\alpha\beta}-\mu G^{\alpha\beta})(\tilde{F}_{\alpha\beta}-\mu\tilde{G}_{\alpha\beta})=\\ &=(\tilde{G}^{\alpha\beta}-\varepsilon\tilde{F}^{\alpha\beta})(F_{\alpha\beta}-\mu G_{\alpha\beta})=0,\end{aligned} \tag{83.17}$$

или в трехмерной форме:

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}-\varepsilon\mathbf{E})\cdot(\varepsilon\mathbf{B}-\mathbf{H})&=(\mathbf{B}-\mu\mathbf{H})\cdot(\mathbf{E}-\mu\mathbf{D})=0,\\ (\mathbf{D}-\varepsilon\mathbf{E})\cdot(\mathbf{E}-\mu\mathbf{D})&+(\mathbf{B}-\mu\mathbf{H})\cdot(\varepsilon\mathbf{B}-\mathbf{H})=0.\end{aligned} \tag{83.18}$$

Задача 83.3. *Показать, что ковариантной формой дифференциального закона Ома в среде с изотропной электропроводимостью* σ *является уравнение*

$$j^\mu=(\sigma/c)F^{\mu\nu}U_\nu. \tag{83.19}$$

Задача 83.4. *Записать граничные условия* (12.8) *в ковариантной форме.*