§ 84. УРАВНЕНИЯ МИНКОВСКОГО

Уравнения динамики материальной точки, предложенные Минковским, внешне имеют ту же форму, что и уравнения Ньютона, но оперируют с четырехмерными величинами (4-координатами, 4-скоростями, 4-ускорениями и 4-силами), характеризующими движение частицы в псевдоэвклидовой геометрии Минковского. Уравнения Минковского имеют вид

$$\mathcal{M}\frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}=\mathcal{F}^{\mu}. \tag{84.1}$$

Скалярная числовая величина $\mathcal{M}$ в этих уравнениях характеризует инерционные свойства частицы и называется ее *собственной массой*. Роль времени в уравнениях Минковского играет инвариантное *собственное время* τ частицы, роль скорости — 4-скорость U, а роль силы — 4-вектор силы $\mathcal{F}$, являющийся обобщением трехмерной ньютоновской силы $\mathbf{F}$.

В предельном случае медленных движений, когда $u \ll c$, пространственные компоненты 4-скорости $\mathbf{U}$ переходят в обычную трехмерную скорость $\mathbf{u}$, а собственное время $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t\left(1-u^2/c^2\right)^{1/2}$ перестает отличаться от ньютоновского времени $\mathrm{d}t$. Поэтому если потребовать, чтобы пространственные компоненты 4-вектора силы $\mathcal{F}$ также переходили в этом пределе в ньютоновскую силу $\mathbf{F}$, то пространственные уравнения Минковского, очевидно, будут удовлетворять нужному принципу соответствия с уравнениями динамики Ньютона.

Остается лишь выяснить смысл временно́го уравнения Минковского ($\mu=0$). Для этого воспользуемся тождеством $U_{\mu}U^{\mu}=c^2$, или

$$U_{\mu}\mathrm{d}U^{\mu}/\mathrm{d}\tau=0, \tag{84.2}$$

с учетом которого из (84.1) выводим

$$U_{\mu}\mathcal{F}^{\mu}=U_0\mathcal{F}^0-\left(\mathbf{U}\boldsymbol{\mathcal{F}}\right)=0. \tag{84.3}$$

Соотношение (84.3) позволяет выразить $\mathcal{F}^0$ через $\boldsymbol{\mathcal{F}}$:

$$\mathcal{F}^0=\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{U}\right)/U^0=\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{u}\right)/c. \tag{84.4}$$

Таким образом, $c\mathcal{F}^0$ при $u \ll c$ совпадает с мощностью внешней силы, т. е.

$$c\mathcal{F}^0=\left(\boldsymbol{\mathcal{F}}\mathbf{u}\right)\approx\left(\mathbf{Fu}\right).$$

Это обстоятельство наводит на мысль, что временно́е уравнение Минковского является ковариантным обобщением теоремы живых сил в механике Ньютона. Чтобы проверить эту догадку, запишем $\mathcal{M}cU^0$ в предельном случае $u \ll c$:

$$\mathcal{M}cU^0=\frac{\mathcal{M}c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\mathcal{M}c^2+\frac{1}{2}\mathcal{M}u^2+\ldots \tag{84.5}$$

Поскольку $\mathscr{M}c^2$ является постоянной величиной, временно́е уравнение Минковского в этом приближении принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mathscr{M}u^2\right)=(\mathbf{Fu}),$$

т. е. в самом деле совпадает с теоремой живых сил.

Итак, мы пришли к выводу, что уравнения Минковского выражают закон изменения энергии и импульса частицы под влиянием внешних сил. В связи с этим введем понятие 4-импульса частицы

$$\mathscr{P}=\mathscr{M}U, \tag{84.6}$$

компоненты которого удобно представить в виде

$$\mathscr{P}^{\mu}=(mc,\ m\mathbf{u}), \tag{84.7}$$

где

$$m\equiv\frac{\mathscr{M}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{84.8}$$

Тогда уравнения Минковского записываются в следующей ковариантной форме:

$$\mathrm{d}\mathscr{P}^{\mu}/\mathrm{d}\tau=\mathscr{F}^{\mu}. \tag{84.9}$$

Замечая, что $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t(1-u^2/c^2)^{1/2}$, и вводя обозначение

$$\mathbf{F}=\mathscr{F}\sqrt{1-u^2/c^2}, \tag{84.10}$$

уравнения Минковского можно записать и в трехмерной форме:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mc^2)=(\mathbf{Fu}),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{u})=\mathbf{F}. \tag{84.11}$$

Трактуя первое из уравнений (84.11) как теорему живых сил, мы видим, что *энергией частицы* в релятивистской механике следует назвать величину

$$E=mc^2, \tag{84.12}$$

а релятивистским импульсом — вектор

$$\mathbf{P}=m\mathbf{u}. \tag{84.13}$$

По аналогии с ньютоновским выражением для импульса величину m называют *инертной* или *динамической массой.* В отличие от собственной массы $\mathscr{M}$ частицы она переменна, т. е. зависит от скорости u частицы в соответствии с (84.8) и, кроме того, является не скаляром, а временно́й компонентой 4-вектора. Таким образом, в трехмерной интерпретации уравнения релятивистской динамики описывают движение частицы с переменной массой $m(u)$, которая оказывается связанной с энергией E частицы соотношением (84.12). Последнее было впервые получено Эйнштейном и часто называется *соотношением эквивалентности энергии и массы.*

Задача 84.1. *Вывести соотношение эквивалентности Эйнштейна, воспользовавшись допущением, что взаимодействие между частицами передается со скоростью света, а также приняв, что в дополнение к закону сохранения энергии выполняется закон сохранения инертной массы. Получить отсюда зависимость* (84.8).

В связи с соотношением эквивалентности Эйнштейна обратим внимание на важную особенность релятивистской энергии $E=mc^2$: для неподвижной частицы она не обращается в нуль, как нерелятивистская кинетическая энергия $mu^2/2$, а оказывается равной постоянной величине

$$E_0=\mathscr{M}c^2, \tag{84.14}$$

называемой *собственной энергией частицы.* Если в нерелятивистской механике энергия материальной точки определяется из теоремы живых сил $\mathrm{d}E=(\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{P})$ с точностью до аддитивной постоянной, то в релятивистской теории отбросить постоянную E_0, не нарушив тензорных свойств E, очевидно, нельзя. В самом деле, разность $E-E_0$ уже не является компонентой какого-либо 4-тензора, поскольку E_0 — скаляр, а E — временнáя составляющая 4-вектора.

Отметим, что, согласно определению (84.6) 4-импульса свободной частицы $\mathscr{P}^\mu=(E/c, \mathbf{P})$, его инвариантная длина связана с важной характеристикой частицы — ее *собственной массой* $\mathscr{M}$:

$$\mathscr{M}=(\mathscr{P}_\mu\mathscr{P}^\mu)^{1/2}/c=(E^2-c^2\mathbf{P}^2)^{1/2}/c^2=\mathrm{inv}. \tag{84.15}$$

Задача 84.2. *Показать, что элемент объема*

$$\mathrm{d}\Gamma=\mathrm{d}\mathscr{P}^1\mathrm{d}\mathscr{P}^2\mathrm{d}\mathscr{P}^3\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3, \tag{84.16}$$

фазового пространства частицы с собственной массой $\mathscr{M}$ *является инвариантом ортохронных преобразований Лоренца. Показать также, что инвариантом собственных преобразований Лоренца является величина*

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathscr{P}}=\mathrm{d}\mathscr{P}^1\mathrm{d}\mathscr{P}^2\mathrm{d}\mathscr{P}^3/\mathscr{P}^0. \tag{84.17}$$

§ 85. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если материальная точка обладает электрическим зарядом e и находится во внешнем электромагнитном поле, то на нее действует сила Лоренца, которую необходимо записать в четырехмерной ковариантной форме, т. е. выразить 4-вектор силы $\mathscr{F}$ через тензор $F^{\mu\nu}$ электромагнитного поля и 4-скорость U частицы.

Известно, что всегда можно однозначно восстановить 4-вектор силы $\mathscr{F}$ по нерелятивистской силе $\mathbf{F}$. Существует несколько методов такого восстановления. Самый наглядный среди них —