соотношением (84.12). Последнее было впервые получено Эйнштейном и часто называется *соотношением эквивалентности энергии и массы.*

Задача 84.1. *Вывести соотношение эквивалентности Эйнштейна, воспользовавшись допущением, что взаимодействие между частицами передается со скоростью света, а также приняв, что в дополнение к закону сохранения энергии выполняется закон сохранения инертной массы. Получить отсюда зависимость* (84.8).

В связи с соотношением эквивалентности Эйнштейна обратим внимание на важную особенность релятивистской энергии $E=mc^2$: для неподвижной частицы она не обращается в нуль, как нерелятивистская кинетическая энергия $mu^2/2$, а оказывается равной постоянной величине

$$E_0=\mathcal{M}c^2, \tag{84.14}$$

называемой *собственной энергией частицы*. Если в нерелятивистской механике энергия материальной точки определяется из теоремы живых сил $\mathrm{d}E=(\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{P})$ с точностью до аддитивной постоянной, то в релятивистской теории отбросить постоянную E_0, не нарушив тензорных свойств E, очевидно, нельзя. В самом деле, разность $E-E_0$ уже не является компонентой какого-либо 4-тензора, поскольку E_0 — скаляр, а E — временна́я составляющая 4-вектора.

Отметим, что, согласно определению (84.6) 4-импульса свободной частицы $\mathcal{P}^\mu=(E/c, \mathbf{P})$, его инвариантная длина связана с важной характеристикой частицы — ее *собственной массой* $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}=(\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}^\mu)^{1/2}/c=(E^2-c^2\mathbf{P}^2)^{1/2}/c^2=\mathrm{inv}. \tag{84.15}$$

Задача 84.2. *Показать, что элемент объема*

$$\mathrm{d}\Gamma=\mathrm{d}\mathcal{P}^1\mathrm{d}\mathcal{P}^2\mathrm{d}\mathcal{P}^3\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3, \tag{84.16}$$

фазового пространства частицы с собственной массой $\mathcal{M}$ *является инвариантом ортохронных преобразований Лоренца. Показать также, что инвариантом собственных преобразований Лоренца является величина*

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathcal{P}}=\mathrm{d}\mathcal{P}^1\mathrm{d}\mathcal{P}^2\mathrm{d}\mathcal{P}^3/\mathcal{P}^0. \tag{84.17}$$

§ 85. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если материальная точка обладает электрическим зарядом e и находится во внешнем электромагнитном поле, то на нее действует сила Лоренца, которую необходимо записать в четырехмерной ковариантной форме, т. е. выразить 4-вектор силы $\mathcal{F}$ через тензор $F^{\mu\nu}$ электромагнитного поля и 4-скорость U частицы.

Известно, что всегда можно однозначно восстановить 4-вектор силы $\mathcal{F}$ по нерелятивистской силе $\mathbf{F}$. Существует несколько методов такого восстановления. Самый наглядный среди них —

прямой метод. Он состоит в следующем. Допустим, что в некоторый момент времени t_0 частица имеет скорость $\mathbf{u}$. Тогда можно рассмотреть ее движение в инерциальной системе отсчета Σ', движущейся именно с этой скоростью.

Ясно, что для моментов времени, бесконечно мало отличающихся от момента t_0, скорость частицы близка к $\mathbf{u}$, т. е. движение ее в системе Σ' заведомо нерелятивистское. Поэтому уравнения движения в системе Σ' имеют известную нерелятивистскую форму:

$$\mathrm{d}E'/\mathrm{d}t'=(\mathbf{u}'\mathbf{F}'),\quad \mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t'=\mathbf{F}', \tag{85.1}$$

где предполагается известным вид силы $\mathbf{F}'$. Теперь, чтобы найти 4-вектор силы $\mathscr{F}$, достаточно лишь совершить переход к неподвижной системе отсчета.

Задача 85.1. *Найти прямым методом 4-вектор силы Лоренца $\mathscr{F}$.*

Восстановим 4-вектор силы Лоренца на основании принципа соответствия. Замечая, что нерелятивистская сила Лоренца

$$\mathbf{F}=e\left(\mathbf{E}+[\mathbf{uB}]/c\right) \tag{85.2}$$

линейна по электромагнитному полю, попытаемся построить 4-вектор силы $\mathscr{F}$ так, чтобы он был линеен по тензору $F^{\mu\nu}$ электромагнитного поля. Так как из других тензоров, согласно (85.2), можно использовать лишь 4-вектор скорости U частицы, то единственное приемлемое выражение для $\mathscr{F}^{\mu}$ имеет вид

$$\mathscr{F}^{\mu}=\alpha F^{\mu\nu}U_{\nu}, \tag{85.3}$$

где постоянная α должна определяться из принципа соответствия*.

В пределе медленных движений выражение (85.3) сводится к следующему:

$$\mathscr{F}^{\mu}=\alpha\left\{(\mathbf{Eu}),\ c\mathbf{E}+[\mathbf{uB}]\right\},$$

и его сравнение с (85.2) показывает, что необходимо выбрать $\alpha=e/c$, т. е.

$$\mathscr{F}^{\mu}=eF^{\mu\nu}U_{\nu}/c. \tag{85.4}$$

Таким образом, уравнения Минковского, описывающие движение заряда в электромагнитном поле, принимают вид

$$\mathscr{M}\frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}F^{\mu\nu}U_{\nu}. \tag{85.5}$$

Отделяя в (85.5) временну́ю и пространственные компоненты, находим

$$\mathscr{M}\frac{\mathrm{d}U^{0}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}(\mathbf{UE}),\quad \mathscr{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}\left\{U^{0}\mathbf{E}+[\mathbf{UB}]\right\}, \tag{85.6}$$

---

* Другая возможная комбинация $\tilde{F}^{\mu\nu}U_{\nu}$, также линейная по $F^{\mu\nu}$, отпадает, так как является псевдовектором.

или после подстановки $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t(1-u^2/c^2)^{1/2}$ и введения инертной массы m

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mc^2) = e(\mathbf{uE}), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{u}) = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uB}]\right). \tag{85.7}$$

Временно́е уравнение в (85.7), очевидно, представляет собой *релятивистскую теорему живых сил* и получается из пространственных уравнений скалярным умножением на $\mathbf{u}$.

Задача 85.2. *Найти закон движения заряженной частицы массы $\mathscr{M}$ в параллельных электрическом* $\mathbf{E}$ *и магнитном* $\mathbf{B}$ *полях, которые считаются постоянными и однородными.*

В заключение отметим, что в полученных релятивистских уравнениях движения заряда во внешнем электромагнитном поле не учитывается собственное поле заряда, т. е. сила реакции излучения считается пренебрежимо малой. Такое предположение оправдано только для движений в слабых электромагнитных полях, когда ускорения, испытываемые заряженной частицей, малы. В дальнейшем мы снимем это ограничение и получим релятивистское выражение для силы реакции излучения.

§ 86. ЛАГРАНЖЕВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Полученные выше релятивистские уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле, так же как и соответствующие нерелятивистские уравнения, могут быть выведены из принципа наименьшего действия, т. е. записаны в лагранжевой форме. Как известно из классической механики, для голономных систем, подверженных действию консервативных сил, можно построить главную функцию Гамильтона, или функцию действия,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\,\mathrm{d}t, \tag{86.1}$$

выражаемую через лагранжиан L системы, являющийся некоторой функцией обобщенных координат q и скоростей $\dot{q}$. В частности, для точечной частицы массы $\mathscr{M}$, движущейся в силовом поле с потенциальной функцией $V(\mathbf{r})$, лагранжиан равен

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathscr{M}\dot{\mathbf{r}}^2/2 - V(\mathbf{r}). \tag{86.2}$$

При этом основные уравнения механики имеют вид уравнений Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{86.3}$$

которые могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta S = 0 \tag{86.4}$$

при дополнительном условии $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.