или после подстановки $d\tau = dt(1-u^2/c^2)^{1/2}$ и введения инертной массы m

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = e(\mathbf{uE}), \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{uB}]\right). \tag{85.7}$$

Временно́е уравнение в (85.7), очевидно, представляет собой *релятивистскую теорему живых сил* и получается из пространственных уравнений скалярным умножением на $\mathbf{u}$.

Задача 85.2. *Найти закон движения заряженной частицы массы* $\mathcal{M}$ *в параллельных электрическом* $\mathbf{E}$ *и магнитном* $\mathbf{B}$ *полях, которые считаются постоянными и однородными.*

В заключение отметим, что в полученных релятивистских уравнениях движения заряда во внешнем электромагнитном поле не учитывается собственное поле заряда, т. е. сила реакции излучения считается пренебрежимо малой. Такое предположение оправдано только для движений в слабых электромагнитных полях, когда ускорения, испытываемые заряженной частицей, малы. В дальнейшем мы снимем это ограничение и получим релятивистское выражение для силы реакции излучения.

§ 86. ЛАГРАНЖЕВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Полученные выше релятивистские уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле, так же как и соответствующие нерелятивистские уравнения, могут быть выведены из принципа наименьшего действия, т. е. записаны в лагранжевой форме. Как известно из классической механики, для голономных систем, подверженных действию консервативных сил, можно построить главную функцию Гамильтона, или функцию действия,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt, \tag{86.1}$$

выражаемую через лагранжиан L системы, являющийся некоторой функцией обобщенных координат q и скоростей $\dot{q}$. В частности, для точечной частицы массы $\mathcal{M}$, движущейся в силовом поле с потенциальной функцией $V(\mathbf{r})$, лагранжиан равен

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{M}\dot{\mathbf{r}}^2/2 - V(\mathbf{r}). \tag{86.2}$$

При этом основные уравнения механики имеют вид уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{86.3}$$

которые могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta S = 0 \tag{86.4}$$

при дополнительном условии $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

В релятивистском случае вариационный принцип (86.4) должен быть представлен в лоренц-ковариантной форме. Для этого необходимо, чтобы действие S было релятивистским скаляром. Если рассматривается движение частицы во внешнем поле, то, как известно из классической механики, элементарное действие $\mathrm{d}S$ можно записать в виде

$$\mathrm{d}S=(\mathbf{P}\,\mathrm{d}\mathbf{r})-H\,\mathrm{d}t,$$

где $\mathbf{P}$ — обобщенный импульс частицы, H — гамильтониан. $\mathrm{d}S$ можно представить в форме скалярного произведения:

$$\mathrm{d}S=-\mathscr{P}_\mu \mathrm{d}x^\mu, \qquad (86.5)$$

если ввести 4-вектор $\mathscr{P}^\mu=(H/c,\,\mathbf{P})$. В частности, для свободной частицы собственной массы $\mathscr{M}$ имеем $\mathscr{P}=\mathscr{M}U$, поэтому

$$\mathrm{d}S=-\mathscr{M}U_\mu \mathrm{d}x^\mu=-\mathscr{M}U_\mu U^\mu \mathrm{d}\tau=-\mathscr{M}c^2\mathrm{d}\tau.$$

Таким образом, для свободной релятивистской частицы

$$L=\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=-\mathscr{M}c^2\sqrt{1-u^2/c^2}. \qquad (86.6)$$

В нерелятивистском пределе $(u\ll c)$ лагранжиан сводится к

$$-\mathscr{M}c^2+\mathscr{M}u^2/2+\ldots,$$

т. е., с точностью до аддитивной постоянной, к кинетической энергии частицы.

Чтобы установить структуру обобщенного 4-импульса $\mathscr{P}$ для заряженной частицы в электромагнитном поле, заметим, что лагранжиан L, отвечающий нерелятивистскому движению заряда e в электростатическом поле с потенциалом φ, содержит слагаемое $-e\varphi$. Таким образом, обобщенный 4-импульс $\mathscr{P}$ должен быть линейным по электромагнитным потенциалам. Единственным таким 4-вектором будет лишь комбинация вида

$$\mathscr{P}=\mathscr{M}U+\alpha A. \qquad (86.7)$$

Следовательно, $-e\varphi$ появится в лагранжиане при $\alpha=e/c$. Итак, в присутствии электромагнитного поля

$$\mathscr{P}^\mu=\mathscr{M}U^\mu+eA^\mu/c, \qquad (86.8)$$

что приводит к функции Лагранжа

$$L=-\mathscr{M}c^2\sqrt{1-u^2/c^2}-e\varphi+e(\mathbf{u}\mathbf{A})/c \qquad (86.9)$$

и функции действия

$$S=-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\mathscr{M}c^2+\frac{e}{c}A_\mu U^\mu\right)\mathrm{d}\tau. \qquad (86.10)$$

Задача 86.1. *Показать, что лагранжиан* (86.9) *приводит к правильным уравнениям движения заряженной частицы в электромагнитном поле.*

В качестве поучительного примера использования релятивистских уравнений Лагранжа рассмотрим классическую задачу о бетатроне, т. е. задачу о движении заряженной частицы в переменном аксиально-симметричном магнитном поле **B**. Пусть в цилиндрических координатах r, α, z компоненты магнитной индукции **B** имеют вид

$$B_r = B_r(t, r, z); \quad B_\alpha = 0; \quad B_z = B_z(t, r, z).$$

Введем вектор-потенциал **A**, положив $A_r = A_z = 0$; $A_\alpha = A(t, r, z)$; $B_r = -\partial A/\partial z$; $B_z = r^{-1}\partial(rA)/\partial r$. Тогда

$$A = \frac{1}{2\pi r}\int_0^r B_z 2\pi r \mathrm{d}r \equiv \frac{\Phi}{2\pi r} \equiv \frac{r}{2}\langle B_z\rangle, \tag{86.11}$$

где Φ — магнитный поток сквозь окружность радиуса r; $\langle B_z\rangle$ — средняя индукция магнитного поля внутри этой окружности.

Запишем теперь лагранжиан (86.9) в цилиндрических координатах:

$$L = -\mathcal{M}c^2\left[1 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2)/c^2\right]^{1/2} + (e/c)\, r\dot{\alpha}A.$$

С его помощью получаются следующие уравнения Лагранжа:

$$\begin{gathered} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{r}) = mr\dot{\alpha}^2 + \frac{e}{c}\dot{\alpha} r B_z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\alpha} + \frac{e}{c} rA\right) = 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{z}) = -\frac{e}{c} r\dot{\alpha} B_r, \end{gathered} \tag{86.12}$$

где точкой обозначена полная производная по времени и введена инертная масса

$$m = \mathcal{M}\left[1 - (\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2)/c^2\right]^{-1/2}.$$

Выясним теперь возможность существования стационарной круговой орбиты $z = 0$, $r = R$. В этом случае уравнения (86.12) будут удовлетворены, если $B_r = 0$, т. е. $B_z = B$, и

$$m\dot{\alpha} + \frac{e}{c}B = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mR\dot{\alpha} + \frac{e}{c}A\right) = 0. \tag{86.13}$$

Отсюда с учетом (86.11) находим необходимое условие существования стационарной круговой орбиты, получившее название *бетатронного условия:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B - \frac{1}{2}\langle B\rangle\right) = 0. \tag{86.14}$$

Оно означает, что индукция магнитного поля на стационарной круговой орбите меняется в два раза медленнее, чем средняя индукция внутри орбиты. Если в начальный момент времени $B=0$, то из (86.14) получается более простое *условие Видероэ*:

$$2B=\langle B\rangle. \tag{86.15}$$

Найдем закон изменения энергии частицы $E=mc^2$ с изменением индукции B магнитного поля. Для этого достаточно воспользоваться теоремой живых сил

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mc^2)=-\frac{e}{c}R\dot{\alpha}\dot{A}$$

и исключить $\dot{\alpha}$ с помощью (86.13). Тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E^2)=-2emcR\dot{\alpha}\dot{A}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^2R^2B^2),$$

что соответствует следующему закону изменения энергии с ростом индукции магнитного поля:

$$E=(e^2R^2B^2+\mathrm{const})^{1/2}. \tag{86.16}$$

§ 87. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно также представить в форме канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_i=\partial H/\partial p_i \quad \dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i. \tag{87.1}$$

Для этого следует, пользуясь лагранжианом (86.9), определить канонические обобщенные импульсы

$$p_i=\partial L/\partial \dot{q}_i, \tag{87.2}$$

разрешить уравнения (87.2) относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и, наконец, построить гамильтониан системы

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L, \tag{87.3}$$

выразив его через обобщенные координаты и импульсы q_i, p_i.

Однако в декартовых координатах эту процедуру можно сократить, воспользовавшись соотношением (86.8) и тождеством $U_\mu U^\mu=c^2$. Учитывая, что обобщенный 4-импульс $\mathscr{P}$ имеет компоненты $\mathscr{P}^\mu=(H/c,\,\mathbf{P})$, находим

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^2U_\mu U^\mu=\mathscr{M}^2c^2=(\mathscr{P}_\mu-eA_\mu/c)(\mathscr{P}^\mu-eA^\mu/c)=\\ =(H-e\varphi)^2/c^2-(\mathbf{P}-eA/c)^2.\end{aligned} \tag{87.4}$$

Разрешая (87.4) относительно H, получаем

$$H=c\left[(\mathbf{P}-e\mathbf{A}/c)^2+\mathscr{M}^2c^2\right]^{1/2}+e\varphi. \tag{87.5}$$