индукция внутри орбиты. Если в начальный момент времени $B=0$, то из (86.14) получается более простое *условие Видероэ*:

$$2B=\langle B\rangle. \tag{86.15}$$

Найдем закон изменения энергии частицы $E=mc^2$ с изменением индукции B магнитного поля. Для этого достаточно воспользоваться теоремой живых сил

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mc^2)=-\frac{e}{c}R\dot{\alpha}\dot{A}$$

и исключить $\dot{\alpha}$ с помощью (86.13). Тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E^2)=-2emcR\dot{\alpha}\dot{A}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^2R^2B^2),$$

что соответствует следующему закону изменения энергии с ростом индукции магнитного поля:

$$E=(e^2R^2B^2+\mathrm{const})^{1/2}. \tag{86.16}$$

§ 87. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно также представить в форме канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{q}_i=\partial H/\partial p_i \quad \dot{p}_i=-\partial H/\partial q_i. \tag{87.1}$$

Для этого следует, пользуясь лагранжианом (86.9), определить канонические обобщенные импульсы

$$p_i=\partial L/\partial\dot{q}_i, \tag{87.2}$$

разрешить уравнения (87.2) относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_i$ и, наконец, построить гамильтониан системы

$$H=\sum_i p_i\dot{q}_i-L, \tag{87.3}$$

выразив его через обобщенные координаты и импульсы q_i, p_i.

Однако в декартовых координатах эту процедуру можно сократить, воспользовавшись соотношением (86.8) и тождеством $U_\mu U^\mu=c^2$. Учитывая, что обобщенный 4-импульс $\mathscr{P}$ имеет компоненты $\mathscr{P}^\mu=(H/c,\ \mathbf{P})$, находим

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^2U_\mu U^\mu=\mathscr{M}^2c^2&=(\mathscr{P}_\mu-eA_\mu/c)(\mathscr{P}^\mu-eA^\mu/c)=\\&=(H-e\varphi)^2/c^2-(\mathbf{P}-eA/c)^2.\end{aligned} \tag{87.4}$$

Разрешая (87.4) относительно H, получаем

$$H=c\left[(\mathbf{P}-e\mathbf{A}/c)^2+\mathscr{M}^2c^2\right]^{1/2}+e\varphi. \tag{87.5}$$

Найденное выражение и представляет собой функцию Гамильтона, соответствующую релятивистскому движению заряженной частицы в электромагнитном поле.

Задача 87.1. *Получить канонические уравнения Гамильтона, отвечающие гамильтониану* (87.5).

Замечая, что $\mathbf{P}-(e/c)\mathbf{A}=\mathscr{M}\mathbf{U}$, в нерелятивистском случае выражение (87.5) можно упростить, воспользовавшись малостью отношения

$$(\mathbf{P}-e\mathbf{A}/c)^2/(\mathscr{M}^2c^2)\ll 1.$$

Ограничившись первым нетривиальным членом разложения, имеем

$$H\approx\mathscr{M}c^2+\frac{1}{2\mathscr{M}}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi, \qquad (87.6)$$

что при отсутствии магнитного поля $(\mathbf{A}=0)$ совпадает с обычным нерелятивистским гамильтонианом с точностью до аддитивной постоянной $\mathscr{M}c^2$.

На основании выражения (87.5) нетрудно получить и релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби для функции действия S. Для этого заметим, что [см. (86.5)]

$$\mathscr{P}_\mu=-\partial_\mu S. \qquad (87.7)$$

Поэтому подстановка (87.7) в (87.4) дает

$$\mathscr{M}^2c^2=\left(\partial_\mu S+\frac{e}{c}A_\mu\right)\left(\partial^\mu S+\frac{e}{c}A^\mu\right)=$$

$$=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2-\left(\nabla S-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \qquad (87.8)$$

(релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби для заряда в электромагнитном поле).

Задача 87.2. *Исследовать методом Гамильтона—Якоби движение электрона в кулоновском поле ядра с порядковым номером Z.*

§ 88. СИЛА РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Как уже отмечалось выше, в уравнениях движения (85.5) учитывается лишь внешнее электромагнитное поле $F^{\mu\nu}$, действующее на заряд e, но игнорируется поле излучения самого заряда. Иными словами, в этих уравнениях не учитывается сила реакции излучения, которая в нерелятивистском случае, согласно (47.8), равна

$$\mathbf{F}_\mathrm{R}=2e^2\ddot{\mathbf{u}}/(3c^3). \qquad (88.1)$$

В релятивистском случае, когда скорость частицы сравнима со скоростью света, это выражение должно быть обобщено