Найденное выражение и представляет собой функцию Гамильтона, соответствующую релятивистскому движению заряженной частицы в электромагнитном поле.

Задача 87.1. *Получить канонические уравнения Гамильтона, отвечающие гамильтониану* (87.5).

Замечая, что $\mathbf{P}-(e/c)\mathbf{A}=\mathscr{M}\mathbf{U}$, в нерелятивистском случае выражение (87.5) можно упростить, воспользовавшись малостью отношения

$$(\mathbf{P}-e\mathbf{A}/c)^2/(\mathscr{M}^2c^2)\ll 1.$$

Ограничившись первым нетривиальным членом разложения, имеем

$$H\approx\mathscr{M}c^2+\frac{1}{2\mathscr{M}}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi, \tag{87.6}$$

что при отсутствии магнитного поля $(\mathbf{A}=0)$ совпадает с обычным нерелятивистским гамильтонианом с точностью до аддитивной постоянной $\mathscr{M}c^2$.

На основании выражения (87.5) нетрудно получить и релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби для функции действия S. Для этого заметим, что [см. (86.5)]

$$\mathscr{P}_\mu=-\partial_\mu S. \tag{87.7}$$

Поэтому подстановка (87.7) в (87.4) дает

$$\mathscr{M}^2c^2=\left(\partial_\mu S+\frac{e}{c}A_\mu\right)\left(\partial^\mu S+\frac{e}{c}A^\mu\right)=$$
$$=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2-\left(\nabla S-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \tag{87.8}$$

(релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби для заряда в электромагнитном поле).

Задача 87.2. *Исследовать методом Гамильтона—Якоби движение электрона в кулоновском поле ядра с порядковым номером Z.*

§ 88. СИЛА РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Как уже отмечалось выше, в уравнениях движения (85.5) учитывается лишь внешнее электромагнитное поле $F^{\mu\nu}$, действующее на заряд e, но игнорируется поле излучения самого заряда. Иными словами, в этих уравнениях не учитывается сила реакции излучения, которая в нерелятивистском случае, согласно (47.8), равна

$$\mathbf{F}_\mathrm{R}=2e^2\ddot{\mathbf{u}}/(3c^3). \tag{88.1}$$

В релятивистском случае, когда скорость частицы сравнима со скоростью света, это выражение должно быть обобщено и заменено 4-вектором $\mathscr{F}_{\mathrm{R}}$, сводящимся к (88.1) лишь в пределе медленных движений.

Имея в виду, что всегда можно однозначно восстановить 4-вектор $\mathscr{F}_{\mathrm{R}}$ по его нерелятивистскому аналогу $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}$, применив прямой метод (см. § 85), попытаемся выявить структуру релятивистской силы реакции излучения, наложив условие, чтобы в мгновенно сопутствующей системе отсчета она имела компоненты

$$\mathscr{F}^{\mu}_{\mathrm{R}}=(0,\ \mathbf{F}'_{\mathrm{R}}). \tag{88.2}$$

Из структуры $\mathbf{F}_{\mathrm{R}}$ следует, что $\mathscr{F}_{\mathrm{R}}$ может зависеть лишь от характера движения заряда, но не от вида внешних сил. Иначе говоря, в $\mathscr{F}_{\mathrm{R}}$ могут входить различные производные от U, но не выше второго порядка. Всем этим условиям, очевидно, удовлетворяет 4-вектор

$$\mathscr{F}_{\mathrm{R}}=\alpha\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}\tau^2}+\beta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}+\gamma U, \tag{88.3}$$

где α, β, γ—некоторые скалярные функции, зависящие от $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\tau$ и U*.

Заметим теперь, что $\mathscr{F}_{\mathrm{R}}$, как любой 4-вектор силы, должен удовлетворять условию (84.3):

$$U_{\mu}\mathscr{F}^{\mu}_{\mathrm{R}}=0. \tag{88.4}$$

Поэтому, подставляя (88.3) в (88.4), находим

$$\alpha U_{\mu}\frac{\mathrm{d}^2U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2}+\beta U_{\mu}\frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}+\gamma U_{\mu}U^{\mu}=0.$$

Отсюда с учетом тождества (84.2) и вытекающего из него соотношения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(U_{\mu}\frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\right)=\frac{\mathrm{d}U_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}+U_{\mu}\frac{\mathrm{d}^2U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2}=0$$

получим

$$\gamma=-\frac{\alpha}{c^2}U_{\mu}\frac{\mathrm{d}^2U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau^2}=\frac{\alpha}{c^2}\frac{\mathrm{d}U_{\mu}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}. \tag{88.5}$$

Таким образом, нам остается определить лишь две скалярные функции: α и β. Воспользуемся для этого свойством нечетности $\mathscr{F}_{\mathrm{R}}$ при отражении времени:

$$\mathscr{F}_{\mathrm{R}}(-\tau)=-\mathscr{F}_{\mathrm{R}}(\tau), \tag{88.6}$$

---

* Еще одна возможная комбинация $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}U_{\nu}\frac{\mathrm{d}U_{\sigma}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}^2U_{\lambda}}{\mathrm{d}\tau^2}$ нами отброшена, так как является псевдовектором.

вытекающим из аналогичного свойства $\mathbf{F}_\mathrm{R}$. Для того чтобы структура (88.3) была согласована с (88.6), необходимо, чтобы функции α и β обладали следующими свойствами симметрии:

$$\alpha(-\tau)=\alpha(\tau), \quad \beta(-\tau)=-\beta(\tau). \tag{88.7}$$

Поскольку α и β можно строить только из U и $\mathrm{d}U/\mathrm{d}\tau$, из (88.7) следует, что β должно быть пропорциональным $U_\mu \mathrm{d}U^\mu/\mathrm{d}\tau=0$, т. е. $\beta\equiv 0$, а α может быть произвольной функцией от инварианта $(\mathrm{d}U/\mathrm{d}\tau)^2$, который в нерелятивистском пределе сводится к $-\mathbf{u}^2$. Однако сравнение с (88.1) показывает, что в этом пределе α совпадет с постоянной $2e^2/(3c^3)$, т. е. не может зависеть от $\mathbf{u}^2$. Таким образом, $\alpha=2e^2/(3c^3)$ и с учетом (88.5) получаем окончательно

$$\mathscr{F}^{\mu}_{\mathrm{R}}=\frac{2e^2}{3c^3}\left[\frac{\mathrm{d}^2U^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{U^\mu}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}U_\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right)\right]. \tag{88.8}$$

Задача 88.1. *Получить формулу* (88.8) *прямым методом.*

Теперь уже нетрудно записать и релятивистские уравнения движения заряда в электромагнитном поле с учетом силы реакции излучения. Для этого достаточно добавить 4-силу $\mathscr{F}_\mathrm{R}$ в правую часть уравнений Минковского (85.5):

$$\mathscr{M}\frac{\mathrm{d}U^\mu}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}F^{\mu\nu}U_\nu+\frac{2e^2}{3c^3}\left[\frac{\mathrm{d}^2U^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{U^\mu}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right]. \tag{88.9}$$

Эти уравнения движения впервые были получены в 1938 г. английским физиком *П. А. М. Дираком* и обычно называются *классическими уравнениями движения Дирака — Лоренца.*

Задача 88.2. *Показать, что скорость потерь энергии заряженной частицы на излучение является инвариантом и определяется формулой*

$$P_\mathrm{E}=-\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau}\right)^2. \tag{88.10}$$

В качестве полезного примера использования уравнений движения (88.9) рассмотрим задачу о синхротронном излучении, т. е. об излучении ультрарелятивистского заряда, движущегося в сильном магнитном поле $\mathbf{B}$. В этом случае скорость заряда близка к скорости света, т. е. $u\approx c$ и $U^0\approx|\mathbf{U}|\gg c$. В первом приближении примем, что заряд e движется по окружности некоторого радиуса R поперек магнитного поля $\mathbf{B}$, а сила реакции излучения оказывает незначительное влияние на характер его движения, т. е. ее можно считать малой по сравнению с силой Лоренца. Запишем в указанном приближении пространственную часть уравнений (88.9):

$$\mathscr{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}[\mathbf{UB}]. \tag{88.11}$$

Так как $(\mathbf{UB})=0$ и для движения по окружности радиуса R

$$|\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\tau|=|\mathbf{U}|^2/R,$$

то из (88.11) выводим

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}\tau}\right|=\frac{|\mathbf{U}|^2}{R}=\frac{eB}{\mathscr{M}c}|\mathbf{U}|. \tag{88.12}$$

Таким образом, энергия частицы оказывается связанной с радиусом орбиты соотношением

$$E=\mathscr{M}cU^0\approx\mathscr{M}c|U|=eRB. \tag{88.13}$$

Наконец, из уравнений (88.9), записанных в форме

$$\mathscr{M}\frac{\mathrm{d}U^0}{\mathrm{d}\tau}=\frac{1}{U^0}(\mathbf{U}\mathscr{F}_{\mathrm{R}}),\quad \mathscr{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}\tau}=\frac{e}{c}[\mathbf{UB}]+\mathscr{F}_{\mathrm{R}},$$

следует, что отношения $\dfrac{|\mathscr{F}_{\mathrm{R}}|}{e|[\mathbf{UB}]|/c}$, $\dfrac{|\mathrm{d}U^0/\mathrm{d}\tau|}{|\mathrm{d}\mathbf{U}/\mathrm{d}\tau|}$ должны быть одного порядка малости. Поэтому скорость энергетических потерь на излучение, согласно (88.10) и (88.12), приближенно равна

$$P_{\mathrm{E}}\approx-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\approx\frac{2e^2}{3c^3}\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}\tau}\right|^2\approx\frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{eB}{\mathscr{M}c}\right)^2|\mathbf{U}|^2,$$

или в другой форме, с учетом (88.13),

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2e^2c}{3R^2}\left(\frac{E}{\mathscr{M}c^2}\right)^4.$$

Таким образом, скорость потерь энергии на синхротронное излучение пропорциональна четвертой степени энергии заряженной частицы*.

Практически важным показателем являются относительные потери энергии частицы на излучение за один оборот:

$$-\frac{\Delta E}{E}=-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\frac{2\pi R}{Ec}=\frac{4\pi e^3}{3\mathscr{M}^2c^4}\left(\frac{E}{\mathscr{M}c^2}\right)^2B.$$

В частности, для электрона с энергией $E=10$ ГэВ в магнитном поле с индукцией $B=10^4$ Гс имеем $-\Delta E/E\approx 2{,}5\cdot10^{-3}$, т. е. относительные потери энергии на излучение составляют 0,25% на оборот.

---

* См.: *Соколов А. А., Тернов И. М.* Релятивистский электрон. М., 1974, § 10; *Schott G. A.* Electromagnetic Radiation. Cambridge. 1912; *Иваненко Д. Д., Померанчук И. Я.* О максимальной энергии, достижимой в бетатроне // Докл. АН СССР, 1944. Т. 44. С. 343.