8
ГЛАВА

ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

В этой главе мы дадим релятивистскую формулировку законов сохранения энергии и импульса для электромагнитного поля, для системы зарядов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, и для произвольной системы взаимопревращающихся материальных частиц.

Пример электромагнитной теории массы, явившейся исторически первой полевой моделью протяженной частицы, позволяет наиболее отчетливо увидеть принципиальное различие между двумя распространенными точками зрения на преобразования Лоренца: активной и пассивной. При этом выявляется фундаментальная роль принципа устойчивости и законов сохранения энергии и импульса. Применение принципа наименьшего действия в теории поля позволяет достичь наиболее общей формулировки как уравнений движения, так и законов сохранения.

§ 89. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Начнем с релятивистской формулировки теоремы Пойнтинга, рассмотренной в § 14 в трехмерном виде. Введем 4-вектор f плотности силы Лоренца, положив

$$f^{\mu}=c^{-1}F^{\mu\nu}j_{\nu}. \tag{89.1}$$

Подробно расписав это выражение, убеждаемся, что 4-вектор f имеет следующие компоненты:

$$f^{\mu}=\{(\mathbf{jE})/c,\ \ \rho\mathbf{E}+[\mathbf{jB}]/c\}=(q/c,\,\mathbf{f}), \tag{89.2}$$

т. е. его временна́я часть пропорциональна плотности тепловой мощности $q=(\mathbf{jE})$, выделяющейся в проводниках с током, а пространственная часть совпадает с плотностью силы Лоренца $\mathbf{f}$, действующей со стороны электромагнитного поля на распределенные заряды и токи.

Преобразуем теперь выражение (89.1) с помощью уравнений Максвелла—Лоренца. Получая из (79.2)

$$j^{\alpha}=\frac{c}{4\pi}\partial_{\mu}F^{\mu\alpha},$$

имеем

$$f_{\nu}=\frac{1}{c}F_{\nu\alpha}j^{\alpha}=\frac{1}{4\pi}F_{\nu\alpha}\partial_{\mu}F^{\mu\alpha},$$

или после тождественного преобразования

$$4\pi f_\nu = \partial_\mu\left(F_{\nu\alpha}F^{\mu\alpha}\right) - F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_{\nu\alpha}. \tag{89.3}$$

Перестановка немых индексов $\alpha\rightleftarrows\mu$ с учетом антисимметрии $F^{\mu\alpha}$ позволяет привести второе слагаемое в (89.3) к виду

$$F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_{\nu\alpha} = F^{\mu\alpha}\left(\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu}\right)/2.$$

Но [см. (79.7)]

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = -\partial_\nu F_{\alpha\mu} = \partial_\nu F_{\mu\alpha},$$

так что

$$F^{\mu\alpha}\partial_\mu F_{\nu\alpha} = F^{\mu\alpha}\partial_\nu F_{\mu\alpha}/2 = \partial_\nu\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)/4.$$

В результате соотношение (89.3) принимает вид

$$f_\nu = -\partial_\mu \Theta^\mu_\nu, \tag{89.4}$$

где введен тензор $\hat{\Theta}$ с компонентами

$$\Theta^\mu_\nu = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\right], \tag{89.5}$$

важным свойством которого является исчезающий след

$$\operatorname{Sp}\hat{\Theta} = \Theta^\mu_\mu \equiv 0. \tag{89.6}$$

Для дальнейшего будет более удобным перейти в (89.4) к контравариантным компонентам

$$f^\nu = -\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}, \tag{89.7}$$

где

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\right]. \tag{89.8}$$

Очевидно, что тензор $\hat{\Theta}$ симметричен, т. е. $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$. Распишем его отдельные компоненты:

$$\begin{gathered}\Theta^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right), \quad \Theta^{0i} = \Theta^{i0} = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{EB}]_i, \\ \Theta^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left[E_iE_k + B_iB_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right)\right].\end{gathered} \tag{89.9}$$

Таким образом, тензор $\hat{\Theta}$ имеет следующую пространственно-временную структуру:

$$\Theta^{\mu\nu} = \left\|\begin{matrix} w & c\mathbf{g} \\ \mathbf{S}/c & -\hat{\mathrm{T}} \end{matrix}\right\|, \tag{89.10}$$

где w — плотность энергии электромагнитного поля, $\mathbf{S}$ — вектор Пойнтинга, $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ — плотность импульса электромагнитного поля, $\hat{\mathrm{T}}$ — тензор натяжений Максвелла. В связи с такой структурой тензор $\hat{\Theta}$ получил название *тензора энергии — импульса электромагнитного поля*.

Разделяя временну́ю и пространственную части уравнения (89.7), убеждаемся, что оно является ковариантной записью известных соотношений (13.4) и (14.6)

$$f^k = -\partial g^k/\partial t + \partial_i T^{ik}, \quad q = -\partial w/\partial t - \operatorname{div}\mathbf{S},$$

анализ которых позволил нам в свое время выяснить физический смысл w, $\mathbf{g}$, $\mathbf{S}$ и T^{ik}. Повторим теперь те же рассуждения, но уже в четырехмерной ковариантной форме.

Допустим, что источниками электромагнитного поля являются движущиеся заряженные частицы, сосредоточенные в некоторой ограниченной области V и обладающие полным 4-импульсом

$$\mathscr{P}^{\mu}_{(\mathrm{m})} = \left(E_{(\mathrm{m})}/c,\ \mathbf{P}_{(\mathrm{m})}\right).$$

Тогда теорему живых сил и второй закон Ньютона для системы зарядов можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{P}^{\nu}_{(\mathrm{m})} = \int\limits_V f^{\nu}\mathrm{d}V. \tag{89.11}$$

Однако эта запись не является релятивистски ковариантной. Чтобы сделать ее таковой, введем понятие *центра масс системы зарядов*, который движется как материальная точка с собственной массой $\mathscr{M} = \left(\mathscr{P}_{\mu(\mathrm{m})}\mathscr{P}^{\mu}_{(\mathrm{m})}\right)^{1/2}c^{-1}$, равной собственной массе системы, и 4-импульсом $\mathscr{P}_{(\mathrm{m})}$. 4-скорость центра масс, очевидно, равна $U = \mathscr{P}_{(\mathrm{m})}/\mathscr{M}$, и поэтому можно считать известной мировую линию центра масс $x^{\mu}(\tau)$, параметрически определяемую его собственным временем τ. Построим теперь гиперплоскость $\sigma(\tau)$ с нормалью $n = U/c$, т. е. ортогональную мировой линии центра масс. Если $\mathrm{d}x^{\mu}$ — элемент этой мировой линии, а $\mathrm{d}\sigma^{\mu}$ — элемент гиперплоскости $\sigma(\tau)$, то [см. (74.8) и (74.11)] элемент 4-объема $\mathrm{d}\Omega$ можно представить в виде

$$\mathrm{d}\Omega = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}\sigma_{\mu} = c\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\sigma. \tag{89.12}$$

Вспоминая, что $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\left(1 - u^2/c^2\right)^{1/2}$, где $\mathbf{u}$ — скорость центра масс, из (89.12) выводим

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}V\left(1 - u^2/c^2\right)^{-1/2}. \tag{89.13}$$

Таким образом, чтобы получить ковариантную формулировку уравнения (89.11), достаточно поделить его на $\left(1 - u^2/c^2\right)^{1/2}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathscr{P}^{\nu}_{(\mathrm{m})} = \int\limits_{\sigma} f^{\nu}\mathrm{d}\sigma. \tag{89.14}$$

Проинтегрируем уравнение (89.14) по τ от момента τ_1 до момента τ_2, которым соответствуют гиперплоскости σ_1 и σ_2 (рис. 89.1), и учтем соотношения (89.7) и (89.12). В результате получим

$$\mathscr{P}^{\nu}_{(\mathrm{m})}[\sigma_2] - \mathscr{P}^{\nu}_{(\mathrm{m})}[\sigma_1] = \frac{1}{c}\int\limits_{\Omega} f^{\nu}\mathrm{d}\Omega = -\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu}\mathrm{d}\Omega, \tag{89.15}$$

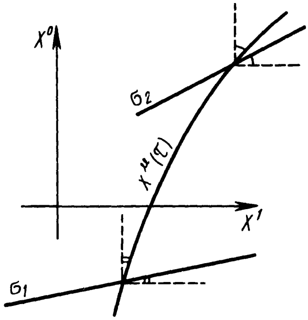

Рис. 89.1

где Ω — 4-объем, заключенный между гиперплоскостями σ_1 и σ_2. Если считать, что в промежутке времени $\tau_2-\tau_1$ электромагнитное поле сосредоточено в некоторой ограниченной области пространства*, по теореме Гаусса — Остроградского (74.14) имеем

$$\int\limits_{\Omega} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} d\Omega = \int\limits_{\sigma_2} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu - \int\limits_{\sigma_1} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu, \quad (89.16)$$

поскольку вклад гиперповерхности, замыкающей 4-объем Ω на пространственной бесконечности, равен нулю. Подставляя (89.16) в (89.15), получаем

$$\mathscr{P}^\nu_{(m)}[\sigma_1] + \frac{1}{c}\int\limits_{\sigma_1} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu = \mathscr{P}^\nu_{(m)}(\sigma_2] + \frac{1}{c}\int\limits_{\sigma_2} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu, \quad (89.17)$$

т. е. 4-вектор

$$\mathscr{P}^\nu \equiv \mathscr{P}^\nu_{(m)}[\sigma] + \frac{1}{c}\int\limits_{\sigma} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu$$

не зависит от выбора пространственноподобной гиперплоскости σ и, следовательно, сохраняется во времени. В связи с этим равенство (89.17) естественно интерпретировать как *закон сохранения энергии — импульса* системы «источники + электромагнитное поле», а 4-вектор

$$\mathscr{P}^\nu_{(f)}[\sigma] \equiv \frac{1}{c}\int\limits_{\sigma} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu \quad (89.18)$$

рассматривать как 4-импульс электромагнитного поля. Выбирая гиперплоскость σ ортогональной оси X^0, получаем

$$\mathscr{P}^\nu_{(f)} = \frac{1}{c}\int \Theta^{0\nu} dV, \quad (89.19)$$

т. е. 4-вектор $\mathscr{P}^\nu_{(f)} = (E_f/c, \mathbf{P}_f)$ имеет следующие компоненты:

$$E_f = \int w\, dV = W, \quad \mathbf{P}_f = \int \mathbf{g}\, dV = \mathbf{G}. \quad (89.20)$$

Задача 89.1. *Показать, что 4-вектор $\mathscr{P}_{(f)}$ является времениподобным или изотропным.*

Обратим внимание на неоднозначность выбора тензора энергии — импульса электромагнитного поля $\hat{\Theta}$. В самом деле, если

* Системы с такими свойствами обычно называют *островными*.

рассматривать (89.7) как уравнение относительно $\Theta^{\mu\nu}$ при заданном f^{ν}, то наряду с тензором $\hat{\Theta}$ [см. (89.8)] этому уравнению будет удовлетворять и всякий другой тензор вида

$$\bar{\Theta}^{\mu\nu}=\Theta^{\mu\nu}+\partial_{\alpha}X^{\alpha\mu\nu}, \tag{89.21}$$

если $X^{\alpha\mu\nu}=-X^{\mu\alpha\nu}$. Справедливость этого утверждения вытекает из очевидного тождества $\partial_{\mu}\partial_{\alpha}X^{\alpha\mu\nu}\equiv 0$.

Задача 89.2. *Показать, что преобразование* (89.21) *не меняет величину* 4-*импульса* (89.19) *для островной системы.*

Отмеченное обстоятельство имеет общий характер и присуще *релятивистской теории поля* (а не только электродинамике). Это объясняется тем, что в релятивистской теории поля закон сохранения энергии—импульса описывается уравнением типа (89.4), допускающим *калибровочное преобразование* (89.21). Обычно это преобразование используется для симметризации тензора энергии—импульса, если первоначально найденный тензор $\hat{\Theta}$ этим свойством не обладает. При этом для замкнутой системы полей всегда можно подобрать такой вспомогательный тензор $X^{\alpha\mu\nu}$, что будет справедливо равенство $\bar{\Theta}^{\mu\nu}=\bar{\Theta}^{\nu\mu}$ (см. § 95).

Однако построенный нами тензор (89.8) уже является симметричным, поэтому отпадает необходимость в выборе вспомогательного тензора $X^{\alpha\mu\nu}$. Оказывается, можно строго показать, что симметричные тензоры $\hat{\Theta}$ не допускают калибровочного преобразования (89.21) и, таким образом, определяются однозначно. Для доказательства воспользуемся следующим простым алгебраическим результатом.

Задача 89.3. *Показать, что тензор третьего ранга $X^{\alpha\mu\nu}$, антисимметричный по первым двум индексам и симметричный по последним, тождественно равен нулю.*

Таким образом, мы приходим к выводу, что требование симметрии тензора энергии—импульса определяет его однозначно. Остается лишь выяснить, на чем основано само это требование. Как было установлено в задаче **13.2**, требование симметрии тензора натяжений Максвелла $T^{ik}=T^{ki}$ вытекает из закона сохранения момента импульса, поэтому остается доказать только равенство $\Theta^{0i}=\Theta^{i0}$, или его векторную форму

$$\mathbf{g}=\mathbf{S}/c^{2} \tag{89.22}$$

(теорема Планка).

Задача 89.4. *Доказать теорему Планка, исходя из симметрии тензора натяжений Максвелла.*

Нетрудно видеть, что по своему физическому смыслу теорема Планка является выражением эквивалентности энергии и массы для электромагнитного поля. Это особенно ясно при сравнении (89.22) с релятивистским соотношением

$$\mathbf{P}=E\mathbf{u}/c^{2}, \tag{89.23}$$

вытекающим из (84.12) и (84.13).