§ 90. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ МАССЫ

Тот замечательный факт, что электромагнитное поле обладает энергией и импульсом, составляющими 4-вектор

$$\mathscr{P}^{\nu}_{(f)}=\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma}\Theta^{\mu\nu}d\sigma_{\mu}, \tag{90.1}$$

привел многих физиков и, в частности, первооткрывателя электрона *Дж. Дж. Томсона* к заманчивой и простой идее об электромагнитном происхождении массы электрона*. Качественно электромагнитный механизм появления инертных свойств у электрона действительно выглядит очень просто: если неподвижный электрон окружен только электрическим полем, то движущийся — еще и магнитным, на создание которого необходимы некоторые затраты энергии. Однако более пристальный анализ проблемы показывает, что чисто электромагнитное объяснение массы электрона все же невозможно. Причин для этого несколько.

Прежде всего для вычисления электромагнитной массы электрона необходимо рассмотреть конкретную его *модель*, т. е. задать распределение зарядов и токов внутри электрона. В простейшей *статической модели электрона*, предложенной *Г. Лоренцем* и *М. Абрагамом*, $\rho=\rho(r)$, $\mathbf{j}=0$, т. е. распределение заряда считается сферически симметричным**. Однако ясно, что отдельные элементы такого электрона, будучи одинаково заряженными, должны расталкиваться и для их сдерживания необходимо вводить какие-то дополнительные силы неэлектромагнитного происхождения. Очевидно, эти сдерживающие силы должны иметь какой-то материальный носитель, т. е. кроме электромагнитного должно существовать по крайней мере еще одно поле, взаимодействие которого с электромагнитным и приводит к появлению сдерживающих сил. Но всякое материальное поле обладает 4-импульсом $\mathscr{P}_{(m)}$, дающим вклад в полный 4-импульс системы $\mathscr{P}=\mathscr{P}_{(m)}+\mathscr{P}_{(f)}$.

С отмеченным обстоятельством связана и другая трудность электромагнитной теории массы. Именно: при вычислении электромагнитного 4-импульса (90.1) обнаруживается, что результат зависит от выбора гиперплоскости интегрирования σ, т. е. не является однозначным. Чтобы понять причину неоднозначности, достаточно проинтегрировать уравнение (89.7) по некоторому 4-объему Ω, заключенному между двумя пространственноподобными гиперповерхностями σ_1 и σ_2 (рис. 90.1), и преобразовать

---

* *Thomson J. J.* Recent Researches on Electricity and Magnetism. Oxford, 1893, p. 24.

** *М. Абрагам* (1902) считал электрон жестким, согласно же Г. Лоренцу форма электрона при движении менялась, а именно: сферическая поверхность переходила в эллипсоид Хевисайда (см. задачу **80.2**).

интеграл в поверхностный с помощью теоремы Гаусса — Остроградского. В результате, предполагая островной характер системы, находим

$$\int_{\Omega} f^{\nu} d\Omega = \int_{\sigma_1} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} - \int_{\sigma_2} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} \tag{90.2}$$

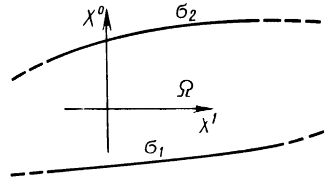

Рис. 90.1

Отсюда, поскольку $f^{\nu} \not\equiv 0$, и вытекает, что электромагнитный 4-импульс $\mathscr{P}_{(f)}$ в общем случае зависит от выбора гиперповерхности интегрирования σ.

Однако указанный недостаток легко устраняется, если ввести вспомогательное поле, обусловливающее сдерживающие силы. Сопоставляя этому полю тензор энергии — импульса $\hat{\Theta}_{(m)}$ и 4-импульс

$$\mathscr{P}^{\nu}_{(m)} = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \Theta^{\mu\nu}_{(m)} d\sigma_{\mu}, \tag{90.3}$$

можно определить сдерживающие силы равенством $f^{\nu}_{\text{сдер}} = -f^{\nu}$ и по аналогии с (89.7) положить

$$f^{\nu}_{\text{сдер}} = -\partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu}_{(m)} = -f^{\nu}. \tag{90.4}$$

Подставляя (90.4) в (90.2) и применяя теорему Гаусса — Остроградского (74.14), находим

$$\int_{\sigma_1} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} = \int_{\sigma_2} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu}, \tag{90.5}$$

где введен полный тензор энергии — импульса системы $\hat{T} \equiv \hat{\Theta}_{(m)} + \hat{\Theta}$, согласно (90.4) и (89.7) удовлетворяющий дифференциальному закону сохранения

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \tag{90.6}$$

Равенство (90.5), вытекающее из (90.6) в предположении островного характера системы, известно как *теорема Беккера.* Оно выражает закон сохранения полного 4-импульса системы

$$\mathscr{P}^{\nu} = \mathscr{P}^{\nu}_{(m)} + \mathscr{P}^{\nu}_{(f)} = \frac{1}{c} \int_{\sigma} T^{\mu\nu} d\sigma_{\mu} \tag{90.7}$$

и независимость последнего от выбора поверхности интегрирования σ. В частности, считая σ гиперплоскостью σ_0, ортогональной оси X^0, получаем обычно используемое выражение для 4-импульса:

$$\mathscr{P}^{\nu} = \frac{1}{c} \int T^{0\nu} dV = \frac{1}{c} \int \left(\Theta^{0\nu}_{(m)} + \Theta^{0\nu}\right) dV. \tag{90.8}$$

Таким образом, на основании теоремы Беккера указанное выше противоречие разрешается.

Между тем если не вводить сдерживающие силы, но условиться о выборе единственной поверхности интегрирования σ, например гиперплоскости σ_0, ортогональной к оси X^0, то противоречие все же возникнет [и вновь в связи с уравнением (90.2)]. Чтобы лучше понять причину этого, полезно сначала ознакомиться с двумя распространенными точками зрения на преобразования Лоренца.

Пусть некоторый объект $\mathscr{O}$ описывается набором физических величин $X=\{A, B, C, ...\}$, являющихся компонентами некоторых 4-тензоров. При преобразовании Лоренца набор X перейдет в новый набор $X'=\{A', B', C', ...\}$, являющийся некоторой функцией старого. Возникающие при этом отношения между наборами X, X' и объектом $\mathscr{O}$ могут рассматриваться с двух различных точек зрения, отождествление которых приводит к принципу относительности*.

1. *Пассивная точка зрения*, или точка зрения двух наблюдателей, рассматривает наборы X и X' как соответствующие одному и тому же объекту $\mathscr{O}$, описываемому двумя разными наблюдателями в своих системах отсчета Σ и Σ'. Таким образом, получается соответствие

$$\mathscr{O}\begin{matrix}\nearrow X\to\Sigma\\ \searrow X'\to\Sigma'\end{matrix}$$

2. *Активная точка зрения*, или точка зрения одного наблюдателя, рассматривает наборы X и X' как соответствующие двум *тождественным* объектам $\mathscr{O}$ и $\mathscr{O}'$, находящимся в различных состояниях и описываемым в одной системе отсчета Σ. В этом случае имеем соответствие

$$\begin{matrix}\mathscr{O}\to X\ \searrow\\ \mathscr{O}'\to X'\ \nearrow\end{matrix}\Sigma$$

В первом подходе преобразования Лоренца, связывающие наборы X и X', осуществляют лишь «перевод» физических величин с языка наблюдателя в Σ на язык наблюдателя в Σ'. При этом уравнения для X также должны «переводиться» с одного языка на другой и форма их при этом может существенно меняться. Лишь с принятием принципа относительности, который в данном случае является дополнительным постулатом, из всех возможных уравнений отбираются те, форма которых при преобразованиях Лоренца остается неизменной.

Во втором же подходе вследствие тождественности объектов $\mathscr{O}$ и $\mathscr{O}'$ наборы X и X' должны соответствовать разным решениям одних и тех же уравнений. Таким образом, активная точка

---

* *Bargmann V.* Relativity — Reviews of Modern Physics, 1957, v. **29**, p. 161.

зрения предполагает, что преобразования Лоренца образуют *группу инвариантности* исходных уравнений, т. е. переводят одно их возможное решение в некоторое другое возможное же решение. Преобразования с такими свойствами были хорошо известны в физике еще до создания теории относительности. Классическим их примером являются канонические преобразования в механике, переводящие один возможный набор канонических переменных $X=\{q, p; t, H\}$, подчиняющихся уравнениям Гамильтона с гамильтонианом $H=H(t, q, p)$, в другой возможный набор канонических переменных $X'=\{q', p'; t', H'\}$, также подчиняющихся уравнениям Гамильтона, но с новым гамильтонианом $H'=H'(t', q', p')$. Можно сказать, что с активной точки зрения, одним из ярких представителей которой был Лоренц, преобразования Лоренца рассматриваются как особого рода канонические преобразования, выделенные из всех других своей универсальностью.

Так как при активном преобразовании Лоренца система отсчета остается неизменной и физический смысл придается лишь непреобразованным координатам и времени, то становится понятной ошибочность широко распространенного мнения о том, что активная точка зрения содержит в себе принцип относительности Эйнштейна. На самом же деле последний предполагает единство активной и пассивной точек зрения, когда преобразованным пространственно-временны́м координатам придается такой же физический смысл, как и непреобразованным.

Вернемся теперь к электромагнитной теории массы, ограничившись статической моделью электрона и приняв, что при вычислении 4-импульса (90.1) выбирается фиксированная гиперплоскость σ_0, ортогональная оси X^0. Очевидно, такой выбор соответствует активной точке зрения на преобразования Лоренца, когда система отсчета остается неизменной, а преобразуются лишь полевые величины, т. е. $\Theta^{\mu\nu}$. Покажем, что так определенные компоненты 4-импульса

$$\mathscr{P}^{\nu}_{(\mathrm{f})}=\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma_0}\Theta^{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma_{\mu}=\frac{1}{c}\int\Theta^{0\nu}\mathrm{d}V \tag{90.9}$$

не образуют 4-вектор*. В самом деле, если считать, что 4-импульс (90.9) соответствует движущемуся электрону, то для неподвижного электрона

$$\mathscr{P}'^{\nu}_{(\mathrm{f})}=\frac{1}{c}\int\Theta'^{0\nu}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V,$$

---

* Во избежание недоразумений следует отметить, что при пассивных преобразованиях Лоренца 4-импульс $\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}$ всегда ведет себя как 4-вектор по определению входящих в него $\theta^{\mu\nu}$ и $\mathrm{d}\sigma_{\mu}$ как компонент соответствующих 4-тензоров. См.: *Широков Ю. М.* Релятивистская теория системы частиц.— Кандидатская диссертация. МГУ, 1951, Гл. III.

или после переобозначения переменных интегрирования $(\mathbf{r}\to\mathbf{r}')$

$$\mathscr{P}'^{\nu}_{(f)}=\frac{1}{c}\int\Theta'^{0\nu}(\mathbf{r}')\,dV'\equiv\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma_0}\Theta'^{\mu\nu}(x')\,d\sigma'_{\mu}. \tag{90.10}$$

Напомним, что σ_0 — гиперплоскость, ортогональная оси X'^0. Отсюда, используя тензорный закон преобразования $\Theta'^{\mu\nu}$ и $d\sigma'_\mu$ через $\Theta^{\alpha\beta}$ и $d\sigma_\alpha$, находим

$$\mathscr{P}'^{\nu}_{(f)}=\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma}\Lambda^{\nu}_{\beta}\Theta^{\alpha\beta}(x)\,d\sigma_{\alpha}, \tag{90.11}$$

где Λ — матрица Лоренца, а гиперплоскость σ связана с σ_0 преобразованием Лоренца. Сравнивая (90.11) с (90.9), убеждаемся, что правильный закон преобразования $\mathscr{P}'^{\mu}_{(f)}=\Lambda^{\mu}_{\nu}\mathscr{P}^{\nu}_{(f)}$ получается лишь в случае, когда

$$\int\limits_{\sigma}\Theta^{\mu\nu}d\sigma_{\mu}=\int\limits_{\sigma_0}\Theta^{\mu\nu}d\sigma_{\mu}. \tag{90.12}$$

Анализируя это соотношение в рамках статической модели электрона, немецкий физик *М. Лауэ* пришел к утверждению, ставшему известным как *теорема Лауэ*, которую можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы электромагнитный 4-*импульс* $\mathscr{P}^{\mu}_{(f)}$, *вычисленный для статической модели электрона по формуле* (90.9), *преобразовывался как* 4-*вектор при активных преобразованиях Лоренца, необходимо и достаточно, чтобы в собственной системе отсчета электрона выполнялись условия*

$$\int\Theta^{ik}dV=0. \tag{90.13}$$

Задача 90.1. *Доказать теорему Лауэ, опираясь на соотношения* (90.2) *и* (90.12).

Однако из существования нулевого следа у тензора энергии — импульса электромагнитного поля

$$\Theta^{\mu}_{\mu}=\Theta^{i}_{i}+\Theta^{0}_{0}=-\sum_{i=1}^{3}\Theta^{ii}+w=0$$

вытекает, что в любой электромагнитной модели электрона

$$\sum_{i=1}^{3}\int\Theta^{ii}dV=\int w\,dV>0,$$

т. е. условия теоремы Лауэ не выполнены. Поэтому компоненты электромагнитного 4-импульса $\mathscr{P}^{\mu}_{(f)}$, вычисленные для движущегося электрона, не удовлетворяют правильному релятивистскому соотношению (89.23).

Задача 90.2. *Вычислить* $\mathscr{P}^{\mu}_{(f)}$ *в моделях электрона Абрагама и Лоренца. Убедиться в нарушении соотношения* (89.23).

Итак, мы убедились, что электромагнитная теория массы без введения сдерживающих сил противоречива. Впервые в рамках статической модели электрона сдерживающие силы были введены *А. Пуанкаре*, который, по аналогии с гидродинамикой, предложил записывать их в виде

$$f^{\nu}_{\text{сдер}} = -\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu}_{\mathrm{P}}. \tag{90.14}$$

При этом в собственной системе отсчета электрона

$$\Theta^{\mu\nu}_{\mathrm{P}} = \mathrm{diag}\left[0, p, p, p\right], \tag{90.15}$$

где p — *давление Пуанкаре*. Таким образом, в собственной системе сдерживающая сила равна $\mathbf{f}_{\text{сдер}} = -\nabla p$ и условие равновесия имеет вид

$$\rho\mathbf{E} - \nabla p = 0. \tag{90.16}$$

Переписав (90.16) в произвольной системе отсчета как $f^{\nu} = -f^{\nu}_{\text{сдер}}$, получаем дифференциальный закон сохранения энергии — импульса

$$\partial_{\mu}\left(\Theta^{\mu\nu} + \Theta^{\mu\nu}_{\mathrm{P}}\right) \equiv \partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0. \tag{90.17}$$

Таким образом, полный тензор энергии-импульса $\hat{\mathrm{T}} = \hat{\Theta} + \hat{\Theta}_{\mathrm{P}}$ удовлетворяет условиям теоремы Беккера, что позволяет записать полный 4-импульс в виде

$$\mathscr{P}^{\mu} = \mathscr{P}^{\mu}_{(\mathrm{f})} + \mathscr{P}^{\mu}_{\mathrm{P}} = \frac{1}{c}\int\left(\Theta^{0\mu} + \Theta^{0\mu}_{\mathrm{P}}\right)\mathrm{d}V. \tag{90.18}$$

Вычисляя его в собственной системе электрона, где $\mathbf{P} = 0$, находим собственную энергию E_0 электрона, которая вследствие (90.15) оказывается совпадающей с электростатической энергией:

$$E_0 = \int T^{00}\,\mathrm{d}V = \int\Theta^{00}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi}\int\mathbf{E}^2\,\mathrm{d}V. \tag{90.19}$$

Представляя электрон в виде шарика радиуса a, заряженного по поверхности зарядом e, имеем

$$E_0 = e^2/(2a), \tag{90.20}$$

что позволяет вычислить собственную массу электрона:

$$\mathscr{M} = E_0/c^2 = e^2/(2ac^2). \tag{90.21}$$

Обратно: задавшись собственной массой $\mathscr{M}$, с помощью (90.21) можно получить характерный размер

$$r_0 = e^2/(\mathscr{M}c^2) \approx 2{,}8\cdot 10^{-13}\ \text{см}, \tag{90.22}$$

условно называемый *электромагнитным радиусом электрона*.

Очевидно, в произвольной системе отсчета, в которой электрон имеет 4-скорость U, в соответствии с (90.18) и (90.21) полный 4-импульс электрона может быть записан в виде

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_{(\mathrm{f})} + \mathscr{P}_{\mathrm{P}} = \mathscr{M}U = e^2U/(2ac^2). \tag{90.23}$$

При этом помимо электромагнитного 4-импульса $\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}$ существенный вклад в $\mathscr{P}$ дает 4-импульс $\mathscr{P}_{\mathrm{P}}$, обусловленный давлением Пуанкаре. В соответствии с вышесказанным каждый из этих 4-импульсов порознь не является 4-вектором относительно активных преобразований Лоренца — таковым является лишь полный 4-импульс. Что же касается собственной массы электрона (90.21), то в схеме Пуанкаре она является чисто электромагнитной.

§ 91. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ И ПОЛЕЙ

В предыдущих параграфах мы получили законы сохранения энергии и импульса для системы зарядов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля. Рассмотрим теперь произвольную совокупность частиц, взаимодействующих посредством некоторой системы полей, которой, по аналогии с электромагнитным случаем, припишем тензор энергии — импульса $\hat{\Theta}_{(\mathrm{f})}$ такой, что плотность 4-силы f^{ν}, действующей на частицы со стороны полей, оказывается равной

$$f^{\nu} = -\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu}_{(\mathrm{f})}. \tag{91.1}$$

Если, с другой стороны, по аналогии с (90.14), эту плотность 4-силы представить в виде дивергенции некоторого «материального» тензора $\hat{\Theta}_{(\mathrm{m})}$, то для полного тензора $\hat{\mathrm{T}} = \hat{\Theta}_{(\mathrm{f})} + \hat{\Theta}_{(\mathrm{m})}$, очевидно, справедливо равенство

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \tag{91.2}$$

В таком случае выполняются условия теоремы Беккера, что позволяет записать сохраняющийся полный 4-импульс в виде

$$\mathscr{P}^{\nu} = \frac{1}{c}\int T^{0\nu}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{c}\int \left(\Theta^{0\nu}_{(\mathrm{f})} + \Theta^{0\nu}_{(\mathrm{m})}\right)\mathrm{d}V. \tag{91.3}$$

Обычно в полном 4-импульсе выделяют 4-импульсы отдельных материальных частиц $\mathscr{P}_{(n)}$ и 4-импульс полей $\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}$, полагая

$$\mathscr{P} = \sum_{n} \mathscr{P}_{(n)} + \mathscr{P}_{(\mathrm{f})}, \tag{91.4}$$

или в компонентах:

$$E = \sum_{n} E_n + E_{\mathrm{f}}, \tag{91.5}$$

$$\mathbf{P} = \sum_{n} \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_{\mathrm{f}}, \tag{91.6}$$

где E_n — энергия n-й частицы; $\mathbf{P}_n$ — ее трехмерный импульс; E_{f} и $\mathbf{P}_{\mathrm{f}}$ — соответственно энергия и трехмерный импульс полей, переносящих взаимодействие.

Производя такое разбиение полного 4-импульса, следует помнить (см. § 90), что каждый из 4-импульсов $\mathscr{P}_{(n)}$ или