При этом помимо электромагнитного 4-импульса $\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}$ существенный вклад в $\mathscr{P}$ дает 4-импульс $\mathscr{P}_{\mathrm{P}}$, обусловленный давлением Пуанкаре. В соответствии с вышесказанным каждый из этих 4-импульсов порознь не является 4-вектором относительно активных преобразований Лоренца — таковым является лишь полный 4-импульс. Что же касается собственной массы электрона (90.21), то в схеме Пуанкаре она является чисто электромагнитной.

§ 91. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ И ПОЛЕЙ

В предыдущих параграфах мы получили законы сохранения энергии и импульса для системы зарядов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля. Рассмотрим теперь произвольную совокупность частиц, взаимодействующих посредством некоторой системы полей, которой, по аналогии с электромагнитным случаем, припишем тензор энергии — импульса $\hat{\Theta}_{(\mathrm{f})}$ такой, что плотность 4-силы f^{ν}, действующей на частицы со стороны полей, оказывается равной

$$f^{\nu}=-\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu}_{(\mathrm{f})}. \tag{91.1}$$

Если, с другой стороны, по аналогии с (90.14), эту плотность 4-силы представить в виде дивергенции некоторого «материального» тензора $\hat{\Theta}_{(\mathrm{m})}$, то для полного тензора $\hat{\mathrm{T}}=\hat{\Theta}_{(\mathrm{f})}+\hat{\Theta}_{(\mathrm{m})}$, очевидно, справедливо равенство

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu}=0. \tag{91.2}$$

В таком случае выполняются условия теоремы Беккера, что позволяет записать сохраняющийся полный 4-импульс в виде

$$\mathscr{P}^{\nu}=\frac{1}{c}\int T^{0\nu}\mathrm{d}V=\frac{1}{c}\int\left(\Theta^{0\nu}_{(\mathrm{f})}+\Theta^{0\nu}_{(\mathrm{m})}\right)\mathrm{d}V. \tag{91.3}$$

Обычно в полном 4-импульсе выделяют 4-импульсы отдельных материальных частиц $\mathscr{P}_{(n)}$ и 4-импульс полей $\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}$, полагая

$$\mathscr{P}=\sum_{n}\mathscr{P}_{(n)}+\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}, \tag{91.4}$$

или в компонентах:

$$E=\sum_{n}E_{n}+E_{\mathrm{f}}, \tag{91.5}$$

$$\mathbf{P}=\sum_{n}\mathbf{P}_{n}+\mathbf{P}_{\mathrm{f}}, \tag{91.6}$$

где E_n — энергия n-й частицы; $\mathbf{P}_n$ — ее трехмерный импульс; E_{f} и $\mathbf{P}_{\mathrm{f}}$ — соответственно энергия и трехмерный импульс полей, переносящих взаимодействие.

Производя такое разбиение полного 4-импульса, следует помнить (см. § 90), что каждый из 4-импульсов $\mathscr{P}_{(n)}$ или

$\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}$ в отдельности, вообще говоря, уже не является 4-вектором в отличие от полного 4-импульса $\mathscr{P}$. 4-векторами они будут лишь в случае, когда частицы практически не взаимодействуют друг с другом и с рассматриваемой системой полей. В самом деле, только тогда каждую частицу можно окружить некоторой замкнутой поверхностью S_n, в точках которой выполнено равенство

$$T^{\mu\nu}=0. \tag{91.7}$$

Нетрудно видеть, что условия (91.7) и (91.2) эквивалентны условиям теоремы Беккера, поэтому можно определить 4-импульс частицы как

$$\mathscr{P}^{\nu}_{(n)}=\frac{1}{c}\int\limits_{V_n} T^{0\nu}\,\mathrm{d}V,$$

т. е. произвести интегрирование по объему V_n, ограниченному поверхностью S_n. Из той же теоремы Беккера следует, что компоненты $\mathscr{P}^{\nu}_{(n)}$ образуют 4-вектор, т. е. справедливо соотношение (89.23).

Аналогично строится и 4-импульс полей, переносящих взаимодействие:

$$\mathscr{P}^{\nu}_{(\mathrm{f})}=\frac{1}{c}\int\limits_{V_f} T^{0\nu}\,\mathrm{d}V,$$

где V_{f} — все пространство за вычетом областей V_n. Очевидно, что компоненты $\mathscr{P}^{\nu}_{(\mathrm{f})}$ также образуют 4-вектор.

Указанные выше условия (91.7) можно считать всегда выполненными в реальных физических экспериментах с элементарными частицами. В этих экспериментах обычно изучается взаимодействие частиц, выводимых из ускорителя, с частицами неподвижной мишени. Сам процесс взаимодействия падающих частиц с мишенью занимает ничтожные доли секунды, а бóльшую часть времени частицы находятся в свободном состоянии. Поэтому если рассматривать состояния нашей системы частиц лишь в моменты времени, достаточно отдаленные от момента непосредственного взаимодействия (т. е. рассматривать либо сближение частиц, либо их разлет), то все частицы можно считать практически невзаимодействующими. Такие состояния принято называть *асимптотически свободными.*

Каждой системе взаимодействующих частиц можно сопоставить *инвариантную сохраняющуюся величину — собственную массу этой системы*

$$\mathscr{M}=\frac{1}{c}(\mathscr{P}_{\mu}\mathscr{P}^{\mu})^{1/2}=\frac{1}{c^2}\left[\left(\sum_n E_n+E_{\mathrm{f}}\right)^2-c^2\left(\sum_n \mathbf{P}_n+\mathbf{P}_{\mathrm{f}}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{91.8}$$

Если же состояние асимптотически свободно, то можно определить и собственные массы поля и отдельных частиц:

$$\mathscr{M}_{\mathrm{f}}=\frac{1}{c^2}\left(E_{\mathrm{f}}^2-c^2\mathbf{P}_{\mathrm{f}}^2\right)^{1/2}, \quad \mathscr{M}_n=\frac{1}{c^2}\left(E_n^2-c^2\mathbf{P}_n^2\right)^{1/2}. \tag{91.9}$$

Нетрудно убедиться, что имеет место неравенство

$$\mathscr{M}\geqslant\sum_n \mathscr{M}_n+\mathscr{M}_{\mathrm{f}}, \tag{91.10}$$

выражающее *неаддитивность собственной массы*, т. е. несовпадение собственной массы системы с суммой собственных масс составляющих ее частей.

Для доказательства неравенства (91.10) выберем систему отсчета, связанную с центром масс системы частиц (коротко — система центра масс), в которой $\mathbf{P}=0$. Тогда собственная масса системы равна

$$\mathscr{M}=\sum_n \mathscr{M}_n\gamma_n+E_{\mathrm{f}}/c^2, \tag{91.11}$$

где $\gamma_n=\left(1-\beta_n^2\right)^{-1/2}$, $c\beta_n=u_n$ — скорость n-й частицы в системе центра масс. Отсюда с учетом очевидных неравенств $\gamma_n\geqslant 1$ и $E_{\mathrm{f}}\geqslant\mathscr{M}_{\mathrm{f}}c^2$ и следует (91.10).

В современной теории элементарных частиц каждому полю сопоставляются особые частицы — кванты этого поля (в частности, электромагнитному полю сопоставляются *фотоны* — кванты света). Предполагая кванты поля асимптотически свободными, можно произвести разбиение:

$$\mathscr{P}_{(\mathrm{f})}=\sum_k \mathscr{P}_{(\mathrm{k})}$$

— и таким образом свести систему частиц, взаимодействующих посредством поля, к совокупности свободных частиц. В этом случае неравенство (91.10) принимает вид

$$\mathscr{M}\geqslant\sum_i \mathscr{M}_i, \tag{91.12}$$

где $\mathscr{M}_i$ — собственные массы асимптотически свободных частиц, включая и кванты поля*. Так как скорость фотона $u=c$, то убеждаемся с помощью (89.23), что для него

$$\mathbf{P}=E\mathbf{u}/c^2=E\mathbf{s}/c, \tag{91.13}$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор, направленный вдоль импульса фотона. Следовательно, собственная масса отдельного фотона равна нулю:

$$\mathscr{M}=\frac{1}{c^2}\left(E^2-c^2\mathbf{P}^2\right)^{1/2}=0. \tag{91.14}$$

---

* Разность $\mathscr{M}-\sum_i \mathscr{M}_i$ обычно называется *дефектом массы*.

Поэтому для совокупности фотонов неравенство (91.12) принимает вид

$$\mathscr{M} \geqslant 0, \tag{91.15}$$

т. е. собственная масса произвольного поля излучения, вообще говоря, отлична от нуля, хотя собственные массы отдельных фотонов, составляющих это поле, равны нулю. Этот результат легко понять, если с учетом (91.13) записать собственную массу совокупности фотонов*:

$$\mathscr{M} = \frac{1}{c^2}\left[\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i E_i \mathbf{s}_i\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{c^2}\left\{\sum_{ik} E_i E_k \left[1 - (\mathbf{s}_i \mathbf{s}_k)\right]\right\}^{1/2}. \tag{91.16}$$

Это выражение равно нулю только в том случае, когда все векторы $\mathbf{s}_i$ одинаково направлены, т. е. все фотоны движутся в одном направлении. В общем же случае произвольно движущихся фотонов $(\mathbf{s}_i \mathbf{s}_k) < 1$ и $\mathscr{M} > 0$.

Задача 91.1. *Частица с массой $\mathscr{M}_1$ налетает на неподвижную частицу с массой $\mathscr{M}_2$ (мишень), и в результате их столкновения рождаются частицы с массами $\mathscr{M}'_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, т. е. идет реакция $\mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2 \to \sum_i \mathscr{M}'_i$. Найти порог реакции T_0, т. е. минимальную кинетическую энергию налетающей частицы, при которой данная реакция может идти.*

Задача 91.2. *При описании реакций типа $\mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2 \to \mathscr{M}_3 + \mathscr{M}_4$ удобно использовать инвариантные переменные Мандельштама*

$$s = (\mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2)^2, \quad t = (\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_3)^2, \quad u = (\mathscr{P}_2 - \mathscr{P}_3)^2.$$

Показать, что они удовлетворяют тождеству $s + t + u = \sum_{i=1}^{4} \mathscr{M}_i^2 c^2$, в свою очередь эквивалентному тождеству

$$(\mathscr{P}_1 \mathscr{P}_2) - (\mathscr{P}_1 \mathscr{P}_3) - (\mathscr{P}_2 \mathscr{P}_3) = (\mathscr{M}_4^2 - \mathscr{M}_1^2 - \mathscr{M}_2^2 - \mathscr{M}_3^2)\, c^2/2. \tag{91.17}$$

Задача 91.3. *Найти порог реакции $\mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2 \to \sum_i \mathscr{M}'_i + \gamma$, в которой рождается фотон γ с энергией E и частицы с массами $\mathscr{M}'_i \neq 0$.*

§ 92. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Изучим более подробно релятивистский закон сохранения энергии для системы частиц и полей, выражаемый равенством (91.5):

$$\sum_n E_n + E_{\mathrm{f}} = E = \mathrm{const}. \tag{92.1}$$

Чтобы выяснить физический смысл входящих сюда величин, запишем $\sum_n E_n$ в нерелятивистском приближении, полагая $\beta_n \ll 1$:

$$\sum_n E_n = \sum_n \mathscr{M}_n c^2 \left(1 - \beta_n^2\right)^{-1/2} \approx \sum_n \left(\mathscr{M}_n c^2 + \mathscr{M}_n u_n^2/2\right). \tag{92.2}$$

---

* См. также задачу **89.1**.