$$(\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2)=(\mathcal{P}'_1\mathcal{P}'_2). \tag{93.1}$$

Тогда

$$E_1\mathcal{M}_2=E'_1E'_2/c^2+(\mathbf{P}'_1)^2,$$

откуда, замечая, что

$$(\mathbf{P}'_1)^2=(\mathbf{P}'_2)^2=(E'^2_1+E'^2_2)/(2c^2)-(\mathcal{M}_1^2+\mathcal{M}_2^2)c^2/2,$$

находим

$$E_1\mathcal{M}_2=(E'_1+E'_2)^2/(2c^2)-(\mathcal{M}_1^2+\mathcal{M}_2^2)c^2/2. \tag{93.2}$$

Вводя активные энергии частиц, т. е. полагая

$$\mathcal{E}\equiv E_1-\mathcal{M}_1c^2,\ 2\mathcal{E}'\equiv E'_1+E'_2-(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)c^2,$$

из (93.2) получим

$$\mathcal{E}\mathcal{M}_2c^2=2\mathcal{E}'^2+2\mathcal{E}'(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)c^2. \tag{93.3}$$

Для анализа этой формулы удобно перейти к безразмерным переменным $\varepsilon=\mathcal{E}/(\mathcal{M}_2c^2)$, $\varepsilon'=\mathcal{E}'/(\mathcal{M}_2c^2)$. Тогда (93.3) принимает вид

$$\varepsilon=2\varepsilon'^2+2\varepsilon'(1+\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2). \tag{93.4}$$

В нерелятивистском случае $\varepsilon'\ll 1$ и поэтому

$$\varepsilon\approx 2\varepsilon'(1+\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_2), \tag{93.5}$$

что для частиц одинаковой массы соответствует хорошо известному учетверению кинетической энергии при удвоении скорости. Однако в ультрарелятивистском случае, когда $\varepsilon'\gg 1$, можно считать

$$\varepsilon\approx 2\varepsilon'^2, \tag{93.6}$$

т. е. $\varepsilon\gg\varepsilon'$. Это означает, что относительно незначительные затраты активной энергии ($2\varepsilon'$) при столкновении встречных пучков оказываются по своей эффективности эквивалентными намного большим (в ε' раз) затратам активной энергии (ε) в случае падения на неподвижную мишень. Это обстоятельство говорит о чрезвычайной эффективности ускорителей на встречных пучках в ультрарелятивистской области.

§ 94. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Как и уравнения механики, уравнения Максвелла могут быть записаны в лагранжевой форме, часто применяемой в современной теории поля. Для вывода полевых уравнений Лагранжа экономнее всего воспользоваться принципом наименьшего действия, или вариационным принципом. Важным преимуществом вариационного подхода является единообразие вывода как уравнений поля, так и вытекающих из них законов сохранения. Ради общности разумно сформулировать вариационный принцип для произвольного поля, а электромагнитное поле рассмотреть в качестве примера, иллюстрирующего общий метод.

Пусть некоторое поле описывается n независимыми функциями $u_s(x)$, $s=1$, 2, ..., n, пространственно-временны́х координат. В основе вариационного подхода к теории поля лежит выбор гамильтонова действия S, которое должно быть некоторым функционалом от поля и обычно берется в виде

$$S[u_s|\Omega]=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\mathscr{L}(u_s,\ \partial_\nu u_s)\mathrm{d}\Omega. \tag{94.1}$$

Здесь Ω — некоторый 4-объем; $\mathscr{L}$ — плотность функции Лагранжа, или лагранжева плотность, являющаяся релятивистски инвариантной функцией от поля и его первых производных.

Для формулировки вариационного принципа* зададим произвольное бесконечно малое преобразование координат и полей:

$$\delta x^\mu(x)\equiv x'^\mu(x)-x^\mu,\quad \delta u_s(x)\equiv u'_s(x')-u_s(x). \tag{94.2}$$

Кроме *полной вариации поля* δu_s нам понадобится еще *вариация формы поля*, определяемая как

$$\tilde{\delta} u_s(x)\equiv u'_s(x)-u_s(x). \tag{94.3}$$

Из (94.3) следует важное свойство вариации формы:

$$\tilde{\delta}\partial_\mu u_s(x)\equiv\partial_\mu u'_s(x)-\partial_\mu u_s(x)=\partial_\mu\tilde{\delta}u_s(x). \tag{94.4}$$

Ограничиваясь величинами первого порядка малости, имеем

$$\tilde{\delta}u_s(x)=u'_s(x')-u_s(x)-(u'_s(x')-u'_s(x))\approx\delta u_s(x)-\partial_\mu u_s\delta x^\mu.$$

Таким образом, полная вариация связана с вариацией формы соотношением

$$\delta u_s=\tilde{\delta}u_s+\partial_\mu u_s\delta x^\mu. \tag{94.5}$$

С помощью (94.4) и (94.5) нетрудно установить, что

$$\delta\partial_\mu u_s=\partial_\mu\tilde{\delta}u_s+\delta x^\nu\partial_\mu\partial_\nu u_s. \tag{94.6}$$

Получим, наконец, вариацию элементарного 4-объема $\delta\mathrm{d}\Omega\equiv\mathrm{d}\Omega'-\mathrm{d}\Omega$, предварительно найдя якобиан $\mathscr{I}$ преобразования координат с точностью до величин первого порядка малости по δx:

$$\mathscr{I}=\det\|\partial_\mu x'^\nu\|=\det\|\delta^\nu_\mu+\partial_\mu\delta x^\nu\|\approx\prod_{\nu=0}^{3}(1+\partial_\nu\delta x^\nu)\approx 1+\partial_\nu\delta x^\nu,$$

откуда

$$\delta\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}\Omega(\mathscr{I}-1)=\mathrm{d}\Omega\,\partial_\mu\delta x^\mu. \tag{94.7}$$

Теперь у нас есть все подготовительные формулы для вычисления вариации действия:

$$\delta S=S'-S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\mathscr{L}(u'_s(x'),\ \partial'_\mu u'_s(x'))\mathrm{d}\Omega'-$$

$$-\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\mathscr{L}(u_s(x),\ \partial_\mu u_s(x)\mathrm{d}\Omega)\approx\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}(\mathscr{L}\delta\mathrm{d}\Omega+\delta\mathscr{L}\,\mathrm{d}\Omega). \tag{94.8}$$

Вводя обобщенный полевой импульс

$$\pi^\mu_s\equiv\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_s)} \tag{94.9}$$

---

* См.: *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М., 1976; *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М., 1961.

и используя соотношения (94.5) и (94.6), находим

$$\delta\mathscr{L}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}\delta u_s+\pi_s^{\mu}\delta(\partial_{\mu}u_s)\right)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}(\tilde{\delta}u_s+\partial_{\nu}u_s\delta x^{\nu})+\pi_s^{\mu}(\partial_{\mu}\tilde{\delta}u_s+\delta x^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}u_s)\right],$$

что с учетом соотношения

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}\partial_{\nu}u_s+\pi_s^{\mu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}u_s\right)=\partial_{\nu}\mathscr{L}$$

преобразуется к виду

$$\delta\mathscr{L}=\partial_{\nu}\mathscr{L}\,\delta x^{\nu}+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}\tilde{\delta}u_s+\pi_s^{\mu}\partial_{\mu}\tilde{\delta}u_s\right). \tag{94.10}$$

Подстановка (94.10) и (94.7) в (94.8) дает

$$\delta S=\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\left[\partial_{\mu}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^{\mu}\tilde{\delta}u_s+\mathscr{L}\delta x^{\mu}\right)+\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}-\partial_{\mu}\pi_s^{\mu}\right)\tilde{\delta}u_s\right]\mathrm{d}\Omega. \tag{94.11}$$

Первое слагаемое в (94.11), имеющее вид четырехмерной дивергенции, можно привести с помощью теоремы Гаусса — Остроградского к интегралу по замкнутой гиперповерхности σ, окружающей 4-объем Ω. В результате получается следующее выражение для полной вариации действия, известное в вариационном исчислении как *формула Адамара:*

$$\delta S[u_s|\Omega]=\frac{1}{c}\oint\limits_{\sigma}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^{\mu}\tilde{\delta}u_s+\mathscr{L}\delta x^{\mu}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mu}+\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}-\partial_{\mu}\pi_s^{\mu}\right)\tilde{\delta}u_s\,\mathrm{d}\Omega. \tag{94.12}$$

Исключая из поверхностного интеграла $\tilde{\delta}u_s$ при помощи (94.5) и вводя *канонический тензор энергии — импульса*

$$T^{\mu\nu}\equiv\sum_{s=1}^{n}\pi_s^{\mu}\partial^{\nu}u_s-\mathscr{L}g^{\mu\nu}, \tag{94.13}$$

можно привести δS к форме, наиболее часто используемой в физике:

$$\delta S[u_s|\Omega]=\frac{1}{c}\oint\limits_{\sigma}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^{\mu}\delta u_s-T^{\mu\nu}\delta x_{\nu}\right)\mathrm{d}\sigma_{\mu}+\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}-\partial_{\mu}\pi_s^{\mu}\right)\tilde{\delta}u_s\,\mathrm{d}\Omega. \tag{94.14}$$

Формула Адамара (94.14) является основой вариационной формулировки теории поля и позволяет получить как уравнения поля в лагранжевой форме, так и вытекающие из них законы сохранения. Для этого необходимо принять следующий вариационный принцип.

Уравнения, которым подчиняются полевые функции u_s, таковы, что их решения реализуют экстремум функционала действия $S[u_s|\Omega]$ среди всех функций, принимающих заданные значения на границе области Ω.

Согласно этому принципу, объемный интеграл в (94.14) должен исчезать, а так как вариации $\tilde{\delta}u_s$ произвольны, то для этого необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\partial_{\mu}\pi_s^{\mu}-\partial\mathscr{L}/\partial u_s=0\quad(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{94.15}$$

которые, согласно (94.9), принимают вид

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu u_s)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_s}=0 \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{94.16}$$

Это и есть *лагранжева форма уравнений поля.*

Очевидно, что с учетом уравнений (94.15) формула (94.14) упрощается и вариация действия δS оказывается зависящей лишь от вариаций поля и координат на граничной гиперповерхности σ:

$$\delta S=\frac{1}{c}\oint\limits_{C}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^\mu\delta u_s-T^{\mu\nu}\delta x_\nu\right)d\sigma_\mu. \tag{94.17}$$

Применим теперь изложенный формализм к электромагнитному полю. В этом случае роль полевых функций будут играть 4-потенциалы A^μ, а в качестве лагранжевой плотности можно использовать инвариант

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-\frac{1}{c}j_\mu A^\mu. \tag{94.18}$$

Чтобы убедиться в том, что предложенная лагранжева плотность является правильной, вычислим сначала обобщенный полевой импульс π_λ^μ. Учитывая, что $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$, находим

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}=\delta_\alpha^\mu g_{\beta\lambda}-\delta_\beta^\mu g_{\alpha\lambda},$$

поэтому

$$\pi_\lambda^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}=-\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}=-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}g_{\alpha\lambda}. \tag{94.19}$$

С другой стороны,

$$\partial\mathcal{L}/\partial A^\lambda=-j_\lambda/c,$$

так что уравнения Лагранжа (94.15) принимают вид

$$-\frac{1}{4\pi}\partial_\mu(F^{\mu\alpha}g_{\alpha\lambda})+\frac{1}{c}j_\lambda=0.$$

После поднятия индекса λ эти уравнения, очевидно, совпадают с (79.2), т. е. с первой группой уравнений Максвелла. Что же касается второй группы уравнений Максвелла (79.4), то она, как известно, эквивалентна соотношению $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$.

§ 95. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

Формула Адамара позволяет получить не только уравнения поля, но и явный вид всех сохраняющихся в силу этих уравнений величин. При этом выясняется, что каждый закон сохранения оказывается тесно связанным с инвариантностью действия относительно некоторого преобразования координат или полевых функций. Чтобы установить эту связь, рассмотрим N различных бесконечно малых преобразований вида

$$\delta^{(r)}x_\nu=X_\nu^{(r)}(x)\delta\lambda_r,\ \delta^{(r)}u_s=U_s^{(r)}(x)\delta\lambda_r\ (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{95.1}$$

где $X_\nu^{(r)}$ и $U_s^{(r)}$ — некоторые функции координат, $\delta\lambda_r$ — постоянные бесконечно малые параметры. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема Нетер. *Если действие S инвариантно относительно N бесконечно малых преобразований* (95.1), *то существует N сохраняющихся в силу уравнений поля величин*

$$\mathcal{I}_r[\sigma]=\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^\mu U_s^{(r)}-T^{\mu\nu}X_\nu^{(r)}\right)d\sigma_\mu \quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{95.2}$$