которые, согласно (94.9), принимают вид

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu u_s)}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_s}=0 \quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{94.16}$$

Это и есть *лагранжева форма уравнений поля.*

Очевидно, что с учетом уравнений (94.15) формула (94.14) упрощается и вариация действия δS оказывается зависящей лишь от вариаций поля и координат на граничной гиперповерхности σ:

$$\delta S=\frac{1}{c}\oint\limits_{C}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^\mu\delta u_s-T^{\mu\nu}\delta x_\nu\right)d\sigma_\mu. \tag{94.17}$$

Применим теперь изложенный формализм к электромагнитному полю. В этом случае роль полевых функций будут играть 4-потенциалы A^μ, а в качестве лагранжевой плотности можно использовать инвариант

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{16\pi}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-\frac{1}{c}j_\mu A^\mu. \tag{94.18}$$

Чтобы убедиться в том, что предложенная лагранжева плотность является правильной, вычислим сначала обобщенный полевой импульс π_λ^μ. Учитывая, что $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$, находим

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}=\delta_\alpha^\mu g_{\beta\lambda}-\delta_\beta^\mu g_{\alpha\lambda},$$

поэтому

$$\pi_\lambda^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}=-\frac{1}{8\pi}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)}=-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}g_{\alpha\lambda}. \tag{94.19}$$

С другой стороны,

$$\partial\mathscr{L}/\partial A^\lambda=-j_\lambda/c,$$

так что уравнения Лагранжа (94.15) принимают вид

$$-\frac{1}{4\pi}\partial_\mu(F^{\mu\alpha}g_{\alpha\lambda})+\frac{1}{c}j_\lambda=0.$$

После поднятия индекса λ эти уравнения, очевидно, совпадают с (79.2), т. е. с первой группой уравнений Максвелла. Что же касается второй группы уравнений Максвелла (79.4), то она, как известно, эквивалентна соотношению $F_{\alpha\beta}=\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha$.

§ 95. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

Формула Адамара позволяет получить не только уравнения поля, но и явный вид всех сохраняющихся в силу этих уравнений величин. При этом выясняется, что каждый закон сохранения оказывается тесно связанным с инвариантностью действия относительно некоторого преобразования координат или полевых функций. Чтобы установить эту связь, рассмотрим N различных бесконечно малых преобразований вида

$$\delta^{(r)}x_\nu=X_\nu^{(r)}(x)\delta\lambda_r,\quad \delta^{(r)}u_s=U_s^{(r)}(x)\delta\lambda_r\quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{95.1}$$

где $X_\nu^{(r)}$ и $U_s^{(r)}$ — некоторые функции координат, $\delta\lambda_r$ — постоянные бесконечно малые параметры. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема Нетер. *Если действие S инвариантно относительно N бесконечно малых преобразований* (95.1), *то существует N сохраняющихся в силу уравнений поля величин*

$$\mathscr{I}_r[\sigma]=\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^\mu U_s^{(r)}-T^{\mu\nu}X_\nu^{(r)}\right)d\sigma_\mu\quad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{95.2}$$

не зависящих в случае островной системы от выбора пространственноподобной гиперповерхности σ.

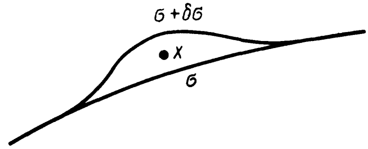

Рис. 95.1

Доказательство теоремы основано на использовании формулы Адамара. Из инвариантности действия относительно преобразований (95.1) следует, что $\delta^{(r)}S=0$. Поэтому при подстановке (95.1) в (94.17) находим

$$\delta^{(r)}S=\delta\lambda_r\frac{1}{c}\oint\limits_{\sigma}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^{\mu}U_s^{(r)}-T^{\mu\nu}X_{\nu}^{(r)}\right)d\sigma_{\mu}=0. \qquad (95.3)$$

Для островной системы в случае 4-объема Ω, ограниченного двумя пространственноподобными гиперповерхностями σ_1 и σ_2, из (95.3) следует равенство

$$\mathscr{I}_r[\sigma_1]=\mathscr{I}_r[\sigma_2], \qquad (95.4)$$

полностью доказывающее теорему.

Поскольку пространственноподобная гиперповерхность σ в (95.2) совершенно произвольна, ее можно немного деформировать в окрестности некоторой точки x (рис. 95.1) и записать равенство (95.4), выбрав $\sigma_1=\sigma$, $\sigma_2=\sigma+\delta\sigma$:

$$\mathscr{I}_r[\sigma+\delta\sigma]-\mathscr{I}_r[\sigma]=0.$$

Отсюда, пользуясь формулой (74.13), нетрудно вывести соответствующие дифференциальные законы сохранения:

$$\partial_{\mu}\left(\sum_{s=1}^{n}\pi_s^{\mu}U_s^{(r)}-T^{\mu\nu}X_{\nu}^{(r)}\right)=0. \qquad (95.5)$$

В качестве иллюстрации теоремы Нетер рассмотрим преобразования сдвига и поворота в четырехмерном пространстве, предполагая, что действие S инвариантно относительно этих преобразований. В случае бесконечно малого сдвига на постоянный вектор $\delta\lambda$ имеем

$$\delta^{(\alpha)}x_{\mu}=\delta_{\mu}^{\alpha}\delta\lambda_{\alpha},\quad \delta u_s=0,$$

т. е.

$$X_{\nu}^{(\alpha)}=\delta_{\nu}^{\alpha},\quad U_s^{(\alpha)}=0. \qquad (95.6)$$

Подстановка (95.6) в (95.5) приводит к дифференциальному закону сохранения

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu}=0, \qquad (95.7)$$

что соответствует интегральной сохраняющейся величине

$$\mathscr{P}^{\nu}=\frac{1}{c}\int\limits_{\sigma}T^{\mu\nu}d\sigma_{\mu}. \qquad (95.8)$$

В конце этого параграфа на примере электромагнитного поля мы убедимся, что 4-вектор (95.8) является 4-импульсом системы.

Рассмотрим теперь преобразование бесконечно малого четырехмерного поворота

$$\delta x_{\mu}=\delta\lambda_{\mu\nu}x^{\nu}, \qquad (95.9)$$

где $\delta\lambda_{\mu\nu}$ — бесконечно малый «угол» поворота в плоскости X^{μ}, X^{ν}. Очевидно, что индекс r в (95.1) соответствует в этом случае двойному индексу $(\mu\nu)\equiv r$. Таким образом, $\delta\lambda_{ik}$ — обычный угол трехмерного поворота, а — $c\delta\lambda_{0i}=v_i$ — относительная скорость двух систем отсчета, задающая некоторое бесконечно малое преобразование Лоренца.

Задача 95.1. *Показать, что* $\delta\lambda_{\mu\nu} = -\delta\lambda_{\nu\mu}$, *воспользовавшись инвариантностью интервала относительно преобразований* (95.9).

С учетом антисимметрии $\delta\lambda_{\mu\nu}$ представим наше преобразование координат и полей в виде

$$\delta x_\tau = 1/2\,\delta\lambda_{\mu\nu} X_\tau^{(\mu\nu)}; \quad \delta u_s = 1/2\, U_s^{(\mu\nu)} \delta\lambda_{\mu\nu}, \tag{95.10}$$

где $X_\tau^{(\mu\nu)} = \delta_\tau^\mu x^\nu - \delta_\tau^\nu x^\mu$; $U_s^{(\mu\nu)} = -U_s^{(\nu\mu)}$ — некоторая функция, определяемая тензорными свойствами полей u_s. Тогда соответствующий дифференциальный закон сохранения (95.5) имеет вид

$$\partial_\lambda \bar{M}^{\lambda\mu\nu} = 0, \tag{95.11}$$

где введены обозначения

$$\bar{M}^{\lambda\mu\nu} \equiv x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + S^{\lambda\mu\nu}, \tag{95.12}$$

$$S^{\lambda\mu\nu} \equiv \sum_{s=1}^{n} \pi_s^\lambda U_s^{(\mu\nu)} = -S^{\lambda\nu\mu}. \tag{95.13}$$

Сохраняющаяся величина, очевидно, имеет вид

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \frac{1}{c}\int\limits_\sigma \bar{M}^{\lambda\mu\nu}\, d\sigma_\lambda. \tag{95.14}$$

Физический смысл ее мы выясним на примере электромагнитного поля в конце параграфа.

Заметим теперь, что канонический тензор энергии — импульса $\hat{T}$, вообще говоря, не является симметричным, т. е. $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$. Поэтому подстановка (95.12) в (95.11) с учетом (95.7) дает

$$\partial_\lambda S^{\lambda\mu\nu} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}. \tag{95.15}$$

Оказывается, что равенство (95.15) можно использовать для построения нового тензора

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda X^{\lambda\mu\nu}, \tag{95.16}$$

симметричного и удовлетворяющего дифференциальному закону сохранения

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0, \tag{95.17}$$

если $X^{\lambda\mu\nu} = -X^{\mu\lambda\nu}$. Именно: оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема Белинфанте*. *Тензор* (95.16) *удовлетворяет дифференциальному закону сохранения* (95.17) *и симметричен, если*

$$X^{\lambda\mu\nu} = \left(S^{\lambda\mu\nu} - S^{\nu\lambda\mu} - S^{\mu\lambda\nu}\right)/2. \tag{95.18}$$

Для доказательства убеждаемся, что $X^{\lambda\mu\nu} = -X^{\mu\lambda\nu}$, поскольку $S^{\lambda\mu\nu} = -S^{\lambda\nu\mu}$ [см. (95.13)]. Поэтому (95.17) является следствием (95.7):

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Далее, с помощью (95.15) тензор $\hat{\Theta}$ можно привести к виду

$$\Theta^{\mu\nu} = \left(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}\right)/2 - \partial_\lambda\left(S^{\nu\lambda\mu} + S^{\mu\lambda\nu}\right)/2, \tag{95.19}$$

откуда очевидна его симметричность. Теорема доказана.

Из теоремы Белинфанте с учетом результата задачи **89.2** следует, что сохраняющийся 4-вектор $\mathcal{P}$ может быть записан в виде

---

* *Belinfante F. J.* On the spin angular momentum of mesons — Physica, 1939, v. 6, p. 887; *Rosenfeld L.* Sur tenseur impulsion — énergie — Mémoires de l'Acad. Roy. Belg., 1940, *t.* 18, fasc. 6, n⁰ 1536.

$$\mathscr{P}^{\nu}=\frac{1}{c}\int_{\sigma} T^{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma_{\mu}=\frac{1}{c}\int_{\sigma}\Theta^{\mu\nu}\mathrm{d}\sigma_{\mu}. \qquad (95.20)$$

Покажем, что и $\mathscr{M}^{\mu\nu}$ также может быть выражено через тензор $\hat{\Theta}$. Для этого образуем новый тензор

$$M^{\lambda\mu\nu}\equiv x^{\mu}\Theta^{\lambda\nu}-x^{\nu}\Theta^{\lambda\mu}, \qquad (95.21)$$

который вследствие (95.17) и свойства симметрии $\Theta^{\mu\nu}=\Theta^{\nu\mu}$ удовлетворяет дифференциальному закону сохранения

$$\partial_{\lambda}M^{\lambda\mu\nu}=0. \qquad (95.22)$$

Подставляя (95.16) в (95.21), имеем

$$M^{\lambda\mu\nu}=x^{\mu}T^{\lambda\nu}-x^{\nu}T^{\lambda\mu}+x^{\mu}\partial_{\tau}X^{\tau\lambda\nu}-x^{\nu}\partial_{\tau}X^{\tau\lambda\mu}=x^{\mu}T^{\lambda\nu}-x^{\nu}T^{\lambda\mu}+$$
$$+\partial_{\tau}\left(x^{\mu}X^{\tau\lambda\nu}-x^{\nu}X^{\tau\lambda\mu}\right)-X^{\mu\lambda\nu}+X^{\nu\lambda\mu}.$$

Но [см. (95.18)] $X^{\nu\lambda\mu}-X^{\mu\lambda\nu}=S^{\lambda\mu\nu}$, поэтому

$$M^{\lambda\mu\nu}=\overline{M}^{\lambda\mu\nu}-\partial_{\tau}K^{\tau\lambda\mu\nu}, \qquad (95.23)$$

где

$$K^{\tau\lambda\mu\nu}\equiv x^{\mu}X^{\tau\lambda\nu}+x^{\nu}X^{\tau\lambda\mu}=-K^{\lambda\tau\mu\nu}. \qquad (95.24)$$

Благодаря антисимметрии тензора (95.24) можно использовать результат задачи **89.2** и с учетом (95.11) и (95.22) получить

$$\mathscr{M}^{\mu\nu}=\frac{1}{c}\int_{\sigma}\overline{M}^{\lambda\mu\nu}\mathrm{d}\sigma_{\lambda}=\frac{1}{c}\int_{\sigma}M^{\lambda\mu\nu}\mathrm{d}\sigma_{\lambda}. \qquad (95.25)$$

Итак, с помощью симметричного тензора энергии—импульса $\hat{\Theta}$ можно вычислять сохраняющиеся величины $\mathscr{P}^{\nu}$ и $\mathscr{M}^{\mu\nu}$. Чтобы выяснить их физический смысл, рассмотрим конкретный пример свободного электромагнитного поля ($j^{\mu}=0$).

Прежде всего на основании (94.19) и (94.13) вычислим $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu}=-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}\partial^{\nu}A_{\alpha}+\frac{1}{16\pi}\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)g^{\mu\nu}. \qquad (95.26)$$

Так как $T^{\mu\nu}\neq T^{\nu\mu}$, то необходимо строить симметричный тензор $\hat{\Theta}$. Замечая, что A является 4-вектором, найдем вариацию $\delta A\mu$ при преобразовании (95.9) по аналогии с δx^{μ}:

$$\delta A_{\tau}=\delta\lambda_{\tau\nu}A^{\nu}=\delta\lambda_{\mu\nu}\left(\delta^{\mu}_{\tau}A^{\nu}-\delta^{\nu}_{\tau}A^{\mu}\right)/2. \qquad (95.27)$$

Сравнением (95.27) с (95.10) находим

$$U^{(\mu\nu)}_{\tau}=\delta^{\mu}_{\tau}A^{\nu}-\delta^{\nu}_{\tau}A^{\mu}. \qquad (95.28)$$

Поэтому, согласно (95.13),

$$S^{\lambda\mu\nu}=\pi^{\lambda}_{\tau}U^{\tau(\mu\nu)}=\left(F^{\lambda\nu}A^{\mu}-F^{\lambda\mu}A^{\nu}\right)/(4\pi), \qquad (95.29)$$

что позволяет найти тензор Белинфанте (95.18):

$$X^{\lambda\mu\nu}=-F^{\lambda\mu}A^{\nu}/(4\pi). \qquad (95.30)$$

Теперь уже нетрудно с помощью (95.16) и уравнений поля $\partial_{\lambda}F^{\lambda\mu}=0$ вычислить симметричный тензор энергии—импульса $\hat{\Theta}$:

$$\Theta^{\mu\nu}=-\frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}F^{\nu\beta}g_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)g^{\mu\nu}\right], \qquad (95.31)$$

очевидно, совпадающий с (89.8). Таким образом, 4-вектор (95.20) совпадает с 4-импульсом $\mathscr{P}_{(f)}$ электромагнитного поля.

Рассмотрим сохраняющийся антисимметричный тензор $\mathcal{M}^{\mu\nu}=-\mathcal{M}^{\nu\mu}$. Для выяснения его физического смысла вычислим сначала его пространственные компоненты

$$\mathcal{M}^{ik}=\frac{1}{c}\int M^{0ik}\,\mathrm{d}V. \tag{95.32}$$

Замечая, что $\varepsilon_{ikj}M^{0kj}/(2c)=[\mathbf{rg}]_i$, где $\mathbf{g}$ — плотность импульса электромагнитного поля, имеем

$$\mathcal{M}_i\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\mathcal{M}^{kj}=\int[\mathrm{rg}]_i\,\mathrm{d}V, \tag{95.33}$$

т. е. $\mathcal{M}$ — вектор момента импульса электромагнитного поля.

Что касается $\mathcal{M}^{0i}$, то, вводя радиус-вектор центра масс электромагнитного поля

$$R^i=\frac{1}{c\mathcal{P}^0}\int x^i\Theta^{00}\mathrm{d}V, \tag{95.34}$$

с учетом (95.20) получаем

$$\mathcal{M}^{0i}=\frac{1}{c}\int\left(x^0\Theta^{0i}-x^i\Theta^{00}\right)\mathrm{d}V=x^0\mathcal{P}^i-R^i\mathcal{P}^0. \tag{95.35}$$

Дифференцируя (95.35) по времени, находим

$$\mathrm{d}R^i/\mathrm{d}t=c\mathcal{P}^i/\mathcal{P}^0\equiv u^i, \tag{95.36}$$

т. е. сохранение величин $\mathcal{M}^{0i}$ выражает не что иное, как закон равномерного поступательного движения центра масс электромагнитного поля.

Сохраняющийся антисимметричный тензор $\mathcal{M}$ обычно называют *релятивистским тензором момента импульса* полевой системы, а соответствующий тензор третьего ранга $M^{\lambda\mu\nu}$ — *релятивистским тензором плотности момента импульса.*

Возвращаясь к фундаментальной теореме Нетер, лежащей в основе вариационной формулировки законов сохранения, можно сказать, что сохранение 4-импульса $\mathcal{P}$ является следствием инвариантности действия относительно 4-сдвигов, а сохранение релятивистского момента импульса $\hat{\mathcal{M}}$ — следствием инвариантности действия относительно 4-поворотов, включающих в себя как пространственные повороты, так и собственные преобразования Лоренца.

§ 96. ТАХИОНЫ

Как отмечалось в § 68, гипотеза о существовании частиц, движущихся со сверхсветовой скоростью, физически приемлема и не противоречит теореме Эйнштейна о предельности скорости сигнализации, если отказаться от одного привычного представления. Имеется в виду представление о возможности создания эмиттера, испускающего сверхсветовую частицу в заранее обусловленный момент времени из заданной пространственной области, и абсорбера (детектора), регистрирующего поглощение такой частицы в определенной пространственной области. Иначе говоря, сверхсветовые частицы физически допустимы как точечные объекты, удовлетворяющие *принципу переключения*, согласно которому абсорбер становится эмиттером, а эмиттер — абсорбером при переходе к системе отсчета, в которой изменяется последовательность момента поглощения и испускания в пространственно разобщенных точках.

На возможность существования сверхсветовых частиц было обращено внимание* в 1960 г. Впоследствии (1967 г.) американским физиком *Дж. Фейнбергом* эти частицы были названы *тахионами.* Соответственно обычные, досветовые,

---

* См.: *Терлецкий Я. П.* Принцип причинности и второе начало термодинамики // Докл. АН СССР, 1960. Т. 133. С. 329.