ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1П. Классификация физических величин. Тензоры

Все физические величины поддаются простой и естественной классификации, возникшей исторически и основанной на использовании одного из важнейших методов познания — метода аналогий. Начнем с описания простейшего физического явления — движения материальной точки. Положение точки по отношению к некоторому телу отсчета задается тремя числами x^1, x^2, x^3, которые определяют радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки и называются его *компонентами* или *координатами*. Закон, по которому устанавливается соответствие между положением $\mathbf{r}$ точки в пространстве и числами $x^i (i=1,\ 2,\ 3)$, определяется выбором системы координат (декартовой, цилиндрической, сферической и др.). Иначе говоря, задание системы координат равносильно заданию одно-однозначной векторной функции

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^1,\ x^2,\ x^3)\equiv\mathbf{r}(x). \tag{1П.1}$$

Если бы мы выбрали другой способ задания положения точки, скажем, с помощью чисел $x'^i (i=1,\ 2,\ 3)$, то из-за однозначности соответствия должно было бы быть

$$\mathbf{r}(x')=r(x), \tag{1П.2}$$

откуда сразу же следует, что x' и x связаны между собой, т. е.

$$x'^i=f^i(x). \tag{1П.3}$$

Принято говорить, что соотношение типа (1П.3) задает *преобразование координат.*

Рассмотрим бесконечно малое смещение точки $\mathrm{d}\mathbf{r}$. В этом случае из (1П.3) следует, что

$$\mathrm{d}x'^i=\mathrm{d}f^i(x)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k=\partial_k f^i\,\mathrm{d}x^k. \tag{1П.4}$$

Здесь мы ввели обозначение для частной производной $\partial_k\equiv\partial/\partial x^k$ и использовали очень удобное правило суммирования Эйнштейна, согласно которому по повторяющимся верхнему и нижнему индексам всегда производится суммирование.

Мы видим, что соотношение (1П.4) позволяет вычислить бесконечно малое смещение точки в любой системе координат и задает, таким образом, *закон преобразования* бесконечно малых смещений $\mathrm{d}x^i$ (или скоростей) при преобразовании координат. Ввиду универсальности соотношения (1П.4), которое справедливо для произвольных преобразований координат (1П.3), удобно именно его положить в основу классификации физических величин.

Прежде всего дадим определение вектора. Три величины a^i $(i=1,\ 2,\ 3)$ образуют *трехмерный вектор* $\mathbf{a}$, если они при преобразовании координат изменяются так же, как и $\mathrm{d}x^i$, т. е.

$$a'^i=\partial_k f^i a^k. \tag{1П.5}$$

Числа a^i называются в этом случае *контравариантными компонентами вектора* $\mathbf{a}$. Примером вектора может служить вектор скорости материальной точки $\mathbf{v}=\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$.

Если мы возьмем n векторов $\mathbf{a}_{(1)}$, $\mathbf{a}_{(2)}, \ldots, \mathbf{a}_{(n)}$, то из их компонент можно образовать произведения вида $a^{i_1}_{(1)} a^{i_2}_{(2)} \ldots a^{i_n}_{(n)}$, где $i_\alpha = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Величины $T^{i_1 \ldots i_n}$, которые при преобразовании координат изменяются так же, как эти произведения, т. е. закону

$$T'^{i_1 \ldots i_n} = \partial_{k_1} f^{i_1} \ldots \partial_{k_n} f^{i_n} T^{k_1 \ldots k_n}, \tag{1П.6}$$

определяют *тензор ранга n* (или *валентности n*) и называются его *контравариантными компонентами.*

Полезно отметить, что с этой точки зрения радиус-вектор точки $\mathbf{r}$ не является настоящим вектором (тензором первого ранга), поскольку его закон преобразования (1П.3) совпадает с (1П.5) только для линейных преобразований координат вида

$$x'^i = A^i_k x^k, \tag{1П.7}$$

где A^i_k — не зависящая от x матрица. Компоненты ускорения $\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2$ также образуют вектор только по отношению к линейным преобразованиям.

Частным случаем преобразований (1П.7) являются вращения, включающие в себя повороты координатных осей и отражения. В частности, преобразование отражения в декартовых координатах принимает вид

$$x'^i = -x^i,$$

поэтому для тензора ранга n

$$T'^{i_1 \ldots i_n} = (-1)^n T^{i_1 \ldots i_n}. \tag{1П.8}$$

Однако встречаются еще и такие физические величины, которые при отражении приобретают дополнительный знак минус по сравнению с (1П.8). Подобные величины получили название *псевдовеличин* (или *аксиальных* величин). Для псевдотензоров, обозначаемых $\tilde{T}^{i_1 \ldots i_n}$, получается тогда следующий закон преобразования при отражении:

$$\tilde{T}'^{i_1 \ldots i_n} = (-1)^{n+1} \tilde{T}^{i_1 \ldots i_n}, \tag{1П.9}$$

при поворотах же они ведут себя как нормальные тензоры.

Рассмотрим теперь закон преобразования координат (1П.3) в том случае, когда координаты x' — декартовы, а x — произвольные другие. В декартовых координатах всегда можно ввести ортогональную тройку базисных единичных векторов $\mathbf{e}_i$ и положить

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x'^i. \tag{1П.10}$$

Если заданы два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с декартовыми компонентами a^i и b^i соответственно, то ортогональность базиса позволяет записать их скалярное произведение в виде

$$(\mathbf{ab}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} a^i b^i. \tag{1П.11}$$

Выберем две близкие точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$ и вычислим квадрат расстояния между ними, воспользовавшись произвольными координатами x. Из (1П.4) и (1П.10)

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{e}_i \mathrm{d}x'^i = \mathbf{e}_i \partial_k f^i \mathrm{d}x^k \equiv \mathbf{h}_k \mathrm{d}x^k, \tag{1П.12}$$

где $\mathbf{h}_k \equiv \mathbf{e}_i \partial_k f^i$ — *локальный репер.* Поэтому квадрат расстояния

$$\mathrm{d}l^2 \equiv (\mathrm{d}\mathbf{r}\,\mathrm{d}\mathbf{r}) = (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_k) \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k \equiv g_{ik} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k, \tag{1П.13}$$

где

$$g_{ik} \equiv (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_k) = \sum_{j=1}^{3} \partial_i f^j \partial_k f^j = g_{ki}. \tag{1П.14}$$

Величины g_{ik} образуют *метрический тензор*, характеризующий выбранную систему координат x^i. В частности, в декартовых координатах

$$dl^2=\sum_{i=1}^{3}(dx'^i)^2\equiv\sum_{i,k=1}^{3}g'_{ik}dx'^i dx'^k, \tag{1П.15}$$

т. е. $g'_{ik}=\delta_{ik}\equiv\delta^i_k$ — символ Кронекера, равный 1 при $i=k$ и 0 при $i\neq k$. Координаты, для которых $g_{ik}=0$ при $i\neq k$, называются *ортогональными*.

Задача 1. *Найти локальные реперы* $\mathbf{h}_i$ *и компоненты метрического тензора* g_{ik} *в цилиндрических и сферических координатах.*

Очевидно, что ортогональные координаты характеризуются тремя параметрами $h_i\equiv|\mathbf{h}_i|$, называемыми *параметрами Ламе*. При этом

$$dl^2=\sum_{i=1}^{3}h_i^2(dx^i)^2. \tag{1П.16}$$

Заметим, что dl^2 можно всегда привести к *инвариантной*, т. е. не зависящей от вида используемых координат, форме, если ввести обозначение

$$dx_i\equiv g_{ik}dx^k. \tag{1П.17}$$

В таком случае для декартовых координат $dx'_i=dx'^i$, и поэтому

$$dl^2=dx'_i dx'^i=dx_i dx^i \tag{1П.18}$$

Подставляя в (1П.18) закон преобразования (1П.4), находим

$$dx'_i dx'^i=dx'_i\partial_k f^i dx^k\equiv dx_k dx^k,$$

откуда

$$dx_k=dx'_i\partial_k f^i. \tag{1П.19}$$

Величины a_i, преобразующиеся так же, как dx_i, т. е. по закону (1П.19), и совпадающие с a'^i в декартовых координатах, называются *ковариантными компонентами вектора* **a**.

Задача 2. *Показать, что* $a_i=g_{ik}a^k$.

По аналогии с (1П.18), *квадрат длины вектора* **a** и *скалярное произведение* двух векторов **a** и **b** можно определить как

$$a^2\equiv a_i a^i=g_{ik}a^i a^k,\quad (\mathbf{ab})\equiv a_i b^i=g_{ik}a^i b^k. \tag{1П.20}$$

Задача 3. *Показать, что скалярное произведение двух векторов* **a** *и* **b** *не зависит от выбора системы координат, т. е. является инвариантом.*

Инвариантные величины часто называют *скалярами* или *тензорами нулевого ранга*.

Задача 4. *Показать, что величины* $\partial_i\varphi$, *где* $\varphi(x)$ — *скалярная функция точки, являются ковариантными компонентами вектора, обозначаемого* $\nabla\varphi\equiv\operatorname{grad}\varphi(x)$ *(градиент). Здесь* ∇ *(набла) — векторный оператор Гамильтона. Убедиться, что* $\nabla\varphi=\mathbf{h}_i\partial^i\varphi$ *и* $d\varphi=(d\mathbf{r}\nabla\varphi)$. *Записать* $\nabla\varphi$ *в цилиндрических и сферических координатах.*

По определению, *ковариантные компоненты* $T_{i_1\ldots i_n}$ тензора ранга n преобразуются как произведения ковариантных компонент n векторов $a^{(1)}_{i_1}, a^{(2)}_{i_2}\ldots a^{(n)}_{i_n}$ и совпадают с $T'^{i_1\ldots i_n}$ в декартовой системе координат. Таким образом, в соответствии с (1П.19)

$$T_{i_1\ldots i_n}=\partial_{i_1}f^{k_1}\ldots\partial_{i_n}f^{k_n}T'_{k_1\ldots k_n}. \tag{1П.21}$$

Аналогично определяются *смешанные компоненты тензора* $T^{\;i_{m+1}\ldots i_n}_{i_1\ldots i_m}$, т. е. m раз ковариантные и n раз контравариантные. Они преобразуются как произведения соответствующих компонент векторов $a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_m}^{m} a_{(m+1)}^{i_{m+1}} \dots a_{(n)}^{i_n}$ и в декартовой системе координат совпадают с $T'^{i_1 \dots i_n}$.

Задача 5. *Показать, что* $T_{i_1 \dots i_n} = g_{i_1 k_1} \dots g_{i_n k_n} T^{k_1 \dots k_n}$.

Задача 6. *Показать, что преобразование, обратное* (1П.21), *имеет вид*

$$T'_{k_1 \dots k_n} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{j_n}}{\partial x'^{k_n}} T_{j_1 \dots j_n}. \qquad (1\Pi.22)$$

Задача 7. *Получить закон преобразования смешанных компонент тензора и показать, что*

$$T_{i_1 \dots i_m}^{\quad\quad\, i_{m+1} \dots i_n} = g_{i_1 k_1} \dots g_{i_m k_m} T^{k_1 \dots k_m i_{m+1} \dots i_n}.$$

Из определения тензора сразу следует, что произведение компонент двух тензоров M и N рангов m и n дает компоненты нового тензора T ранга $m+n$ При этом, например,

$$M_{i_1 \dots i_m} N^{k_1 \dots k_n} \equiv T_{i_1 \dots i_m}^{\quad\quad\, k_1 \dots k_n}.$$

Такой способ получения новых тензоров называется *внешним* или *тензорным умножением*. Кроме того, применяется еще и дополнительная операция, называемая *сверткой* и состоящая в суммировании по некоторым парам индексов разной вариантности. Внешнее умножение, дополненное сверткой, называется *внутренним умножением тензоров*. Примером внутреннего умножения является образование скалярного произведения двух векторов.

Задача 8. *Показать, что каждая свертка уменьшает ранг тензора на* 2. *В частности,*

$$M_{i_1 \dots i_m} N^{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_n} = T^{k_1 \dots k_n}.$$

Чаще всего приходится иметь дело с тензорами второго ранга T^{ik}, обозначаемыми $\hat{\mathrm{T}}$. Внутреннее умножение в таких случаях показывается точкой, а свертка в самом тензоре $\hat{\mathrm{T}}$ — знаком Sp. Тогда, к примеру, равенства

$$a^i = T^{ik} b_k, \quad \varphi = T^{ik} a_i b_k, \quad T^{ik} = M^{ij} N_j^k, \quad \varphi = M^{ij} N_{ji}$$

перепишутся следующим образом:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}; \quad \varphi = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}; \quad \hat{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{M}} \cdot \hat{\mathrm{N}}; \quad \varphi = \mathrm{Sp}(\hat{\mathrm{M}} \cdot \hat{\mathrm{N}}) \equiv \hat{\mathrm{M}} : \hat{\mathrm{N}}.$$

Из тензоров третьего ранга нам понадобится *единичный псевдотензор Леви — Чивиты* ε^{ijk}, который полностью антисимметричен, т. е. меняет знак при перестановке любых двух индексов, а в декартовых координатах $\varepsilon'^{123} = 1$. В силу псевдотензорности при отражениях ε^{ijk} остается неизменным. С помощью ε^{ijk} можно двум векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сопоставить псевдовектор $[\mathbf{ab}]$, называемый их *векторным произведением*

$$[\mathbf{ab}]^i \equiv \varepsilon^{ijk} a_j b_k. \qquad (1\Pi.23)$$

Задача 9. *Убедиться в тензорных свойствах символа Леви — Чивиты* ε^{ijk} *и найти его выражение в произвольной системе координат, исходя из того, что инвариантный элемент объема может быть записан либо в виде* $\mathrm{d}V = g^{1/2} \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3$, *где* $g \equiv \det \| g_{ik} \| \equiv | g_{ik} |$, *либо как элемент объема, построенный на трех векторах* $\mathrm{d}\mathbf{x}$, $\mathrm{d}\mathbf{y}$, $\mathrm{d}\mathbf{z}$, *т. е.* $\mathrm{d}V = \varepsilon_{ijk} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j \mathrm{d}z^k$.

По аналогии с (1П.23), каждому вектору $\mathbf{a}$ можно сопоставить псевдовектор, обозначаемый $[\nabla \mathbf{a}] \equiv \mathrm{rot}\, \mathbf{a}$ и называемый *ротором* или *вихрем вектора* $\mathbf{a}$. Его контравариантные компоненты образуются по правилу

$$(\mathrm{rot}\, \mathbf{a})^i \equiv \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k. \qquad (1\Pi.24)$$

Задача 10. *Убедиться, что формула* (1П.24) *определяет компоненты псевдовектора. Записать* $\mathrm{rot}\, \mathbf{a}$ *в цилиндрических и сферических координатах, используя физические компоненты* $h_i a^i$ *(без суммирования) вектора* $\mathbf{a}$.

Мы ознакомились с двумя дифференциальными операциями векторного анализа — взятием градиента и ротора. Существует еще и третья операция — взятие *дивергенции* вектора, обозначаемая $\operatorname{div}\mathbf{a}\equiv(\nabla\mathbf{a})$ и определяемая следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{a}\equiv g^{-1/2}\partial_i\left(g^{1/2}a^i\right). \qquad (1\Pi.25)$$

Задача 11. *Показать, что* $\operatorname{div}\mathbf{a}$ *является скаляром. Выразить* $\operatorname{div}\mathbf{a}$ *в цилиндрических и сферических координатах.*

В заключение этого параграфа разъясним смысл часто используемых в физике понятий ковариантности и инвариантности уравнений. Уравнение принято называть *ковариантным* относительно некоторого преобразования координат, если в результате преобразования оно не меняет своей формы, т. е. левая и правая его части преобразуются одинаково. Если же еще окажется, что преобразованное уравнение, будучи выраженным в новых координатах, не содержит параметров преобразования, то оно называется *инвариантным* относительно этого преобразования*. В этом же смысле используется и понятие *инвариантных тензоров*. Именно: тензор называется инвариантным относительно некоторого преобразования координат, если преобразованный тензор, будучи выраженным в новых координатах, оказывается неизменным, т. е. не зависящим от параметров преобразования. К примеру, относительный радиус-вектор $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$ двух точек инвариантен относительно сдвига $\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\mathbf{a}$, а тензоры δ^i_k и ε^{ijk} инвариантны относительно вращений $\left(\delta'^i_k=\delta^i_k,\ \varepsilon'^{ijk}=\varepsilon^{ijk}\right)$.

2П. ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Для получения практически важных соотношений, используемых в векторном анализе, оказывается полезным следующее интегральное представление для оператора Гамильтона

$$\nabla=\lim_{S\to0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \qquad (2\Pi.1)$$

Смысл этой записи состоит в том, что три основные дифференциальные операции grad, div и rot могут быть представлены в следующем виде:

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\lim_{S\to0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{n}\varphi\,\mathrm{d}S, \qquad (2\Pi.2\text{а})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=(\nabla\mathbf{a})=\lim_{S\to0}\frac{1}{V}\oint_S (\mathbf{n}\mathbf{a})\,\mathrm{d}S, \qquad (2\Pi.2\text{б})$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=[\nabla\mathbf{a}]=\lim_{S\to0}\frac{1}{V}\oint_S [\mathbf{n}\mathbf{a}]\,\mathrm{d}S. \qquad (2\Pi.2\text{в})$$

Здесь V — бесконечно малый объем, содержащий точку $\mathbf{r}$, в которой вычисляются $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$; S — замкнутая поверхность, окружающая V; $\mathrm{d}S$ — ее элемент; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S; $\lim\limits_{S\to0}$ означает, что поверхность S стягивается к точке $\mathbf{r}$. Формулы (2П.2) проясняют смысл

* Например, уравнение плоскости $(\mathbf{n}\mathbf{r})=a$ только ковариантно, а уравнение сферы $\mathbf{r}^2=a^2$ еще и инвариантно относительно вращения.