Мы ознакомились с двумя дифференциальными операциями векторного анализа — взятием градиента и ротора. Существует еще и третья операция — взятие *дивергенции* вектора, обозначаемая $\operatorname{div}\mathbf{a} \equiv (\nabla\mathbf{a})$ и определяемая следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} \equiv g^{-1/2}\partial_i\left(g^{1/2}a^i\right). \qquad (1\text{П}.25)$$

Задача 11. *Показать, что* $\operatorname{div}\mathbf{a}$ *является скаляром. Выразить* $\operatorname{div}\mathbf{a}$ *в цилиндрических и сферических координатах.*

В заключение этого параграфа разъясним смысл часто используемых в физике понятий ковариантности и инвариантности уравнений. Уравнение принято называть *ковариантным* относительно некоторого преобразования координат, если в результате преобразования оно не меняет своей формы, т. е. левая и правая его части преобразуются одинаково. Если же еще окажется, что преобразованное уравнение, будучи выраженным в новых координатах, не содержит параметров преобразования, то оно называется *инвариантным* относительно этого преобразования*. В этом же смысле используется и понятие *инвариантных тензоров*. Именно: тензор называется инвариантным относительно некоторого преобразования координат, если преобразованный тензор, будучи выраженным в новых координатах, оказывается неизменным, т. е. не зависящим от параметров преобразования. К примеру, относительный радиус-вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ двух точек инвариантен относительно сдвига $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, а тензоры δ^i_k и ε^{ijk} инвариантны относительно вращений $\left(\delta'^i_k = \delta^i_k,\ \varepsilon'^{ijk} = \varepsilon^{ijk}\right)$.

2П. ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Для получения практически важных соотношений, используемых в векторном анализе, оказывается полезным следующее интегральное представление для оператора Гамильтона

$$\nabla = \lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \qquad (2\text{П}.1)$$

Смысл этой записи состоит в том, что три основные дифференциальные операции grad, div и rot могут быть представлены в следующем виде:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathbf{n}\varphi\,\mathrm{d}S, \qquad (2\text{П}.2\text{а})$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = (\nabla\mathbf{a}) = \lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint_S (\mathbf{n}\mathbf{a})\,\mathrm{d}S, \qquad (2\text{П}.2\text{б})$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla\mathbf{a}] = \lim_{S\to 0}\frac{1}{V}\oint_S [\mathbf{n}\mathbf{a}]\,\mathrm{d}S. \qquad (2\text{П}.2\text{в})$$

Здесь V — бесконечно малый объем, содержащий точку $\mathbf{r}$, в которой вычисляются $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$; S — замкнутая поверхность, окружающая V; $\mathrm{d}S$ — ее элемент; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S; $\lim\limits_{S\to 0}$ означает, что поверхность S стягивается к точке $\mathbf{r}$. Формулы (2П.2) проясняют смысл

* Например, уравнение плоскости $(\mathbf{n}\mathbf{r}) = a$ только ковариантно, а уравнение сферы $\mathbf{r}^2 = a^2$ еще и инвариантно относительно вращения.

обозначений $(\nabla \mathbf{a})$ и $[\nabla \mathbf{a}]$. В связи с представлением (2П.1) оператор Гамильтона ∇ часто называется оператором *объемного дифференцирования*.

Задача 12. *Убедиться в справедливости представления* (2П.2), *взяв в качестве объема* V *шар с центром в точке* $\mathbf{r}$.

Задача 13. *Пользуясь* (2П.2), *вычислить* $\operatorname{div}\mathbf{r}$, $\operatorname{rot}\mathbf{r}$, $\operatorname{grad}(\mathbf{ar})$, $\operatorname{rot}[\mathbf{ar}]$, $\operatorname{grad}\varphi(r)$, $\operatorname{div}\mathbf{A}(r)$, $\operatorname{rot}\mathbf{A}(r)$, *где* $\mathbf{a}$ — *постоянный вектор*, $r \equiv |\mathbf{r}|$.

В дальнейшем, если специально не оговорено, мы будем пользоваться декартовыми координатами, в которых оператор ∇ выглядит особенно просто:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \partial_i. \tag{2П.3}$$

Если объект действия оператора ∇ зафиксирован, то в соответствии с (2П.2) с ним можно обращаться, как с обычным вектором. В то же время [см. (2П.3)] он является оператором дифференцирования. В частности, в соответствии с правилом $\mathrm{d}(AB) = (\mathrm{d}A)B + A\,\mathrm{d}B$ имеем

$$\nabla(AB) = (\nabla A)B + A\nabla B,$$

или, помечая объект действия оператора ∇ жирной точкой (•) внизу, условимся писать

$$\nabla(AB) = \nabla \underset{\bullet}{A} B + \nabla A \underset{\bullet}{B}.$$

Вычислим, к примеру, $\operatorname{div}[\mathbf{ab}]$:

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] \equiv (\nabla[\mathbf{ab}]) = (\nabla[\underset{\bullet}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]) + (\nabla[\mathbf{a}\underset{\bullet}{\mathbf{b}}]).$$

С каждым слагаемым, помеченным точкой (•), можно работать уже по правилам векторной алгебры, т. е.

$$(\nabla[\underset{\bullet}{\mathbf{a}}\mathbf{b}]) = (\mathbf{b}[\nabla\underset{\bullet}{\mathbf{a}}]) \equiv (\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}), \quad (\nabla[\mathbf{a}\underset{\bullet}{\mathbf{b}}]) = -(\mathbf{a}[\nabla\underset{\bullet}{\mathbf{b}}]) \equiv -(\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}).$$

В результате находим

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}). \tag{2П.4а}$$

Аналогично можно доказать и многие другие полезные тождества:

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla\varphi), \tag{2П.4б}$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a} + [\nabla\varphi\,\mathbf{a}], \tag{2П.4в}$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \tag{2П.4г}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{ab}) = [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}] + [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \tag{2П.4д}$$

где в последних двух тождествах использовано обозначение $(\mathbf{a}\nabla) = a^i\partial_i$ для оператора дифференцирования вдоль вектора $\mathbf{a}$.

Из представления (2П.2) выведем некоторые полезные интегральные теоремы. Выберем некоторый объем V, окруженный поверхностью S, и разобьем его на достаточно большое число N ячеек. Пусть i-я ячейка имеет объем ΔV_i, окруженный поверхностью ΔS_i. Тогда, по теореме Лагранжа*, внутри ΔV_i найдутся такие точки $\mathbf{r}_i^{(1)}$, $\mathbf{r}_i^{(2)}$, $\mathbf{r}_i^{(3)}$, что будут справедливы соотношения

$$\Delta V_i \nabla\varphi(\mathbf{r}_i^{(1)}) = \oint\limits_{\Delta S_i} \mathbf{n}\varphi\,\mathrm{d}S, \quad \Delta V_i \operatorname{div}\mathbf{a}(\mathbf{r}_i^{(2)}) = \oint\limits_{\Delta S_i} (\mathbf{na})\,\mathrm{d}S, \quad \Delta V_i \operatorname{rot}\mathbf{a}(\mathbf{r}_i^{(3)}) = \oint\limits_{\Delta S_i} [\mathbf{na}]\,\mathrm{d}S.$$

Произведем теперь суммирование по всем ячейкам и положим $N \to \infty$. Тогда в пределе левые части перейдут в интегралы по объему V, а правые части — в

---

* См.: *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1966. Т. 1. § 112.

интегралы по внешней поверхности S, поскольку интегрирование по внутренним поверхностям ΔS_i производится дважды с противоположными значениями нормали $\mathbf{n}$. В результате получим следующие интегральные соотношения, являющиеся различными вариантами общей *теоремы Остроградского*:

$$\int_V \nabla\varphi \mathrm{d}V = \oint_S \mathbf{n}\varphi \mathrm{d}S, \tag{2П.5а}$$

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\mathrm{d}V = \oint_S (\mathbf{na})\mathrm{d}S, \tag{2П.5б}$$

$$\int_V \operatorname{rot}\mathbf{a}\mathrm{d}V = \oint_S [\mathbf{na}]\mathrm{d}S. \tag{2П.5в}$$

Наиболее часто используемое соотношение (2П.5б) известно как *теорема Гаусса — Остроградского*.

Теорему Остроградского можно применять и к компонентам тензора. Подставим, например, в (2П.5а) вместо φ компоненту тензора T^{ik}. Тогда

$$\int_V \partial_j T^{ik}\mathrm{d}V = \oint_S n_j T^{ik}\mathrm{d}S.$$

Свертка по i и j дает

$$\int_V \operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}\mathrm{d}V = \oint_S (\mathbf{n}\cdot\hat{\mathrm{T}})\mathrm{d}S, \tag{2П.6}$$

где $\operatorname{div}\hat{\mathrm{T}}$ — вектор с компонентами $\partial_i T^{ik}$.

Если в (2П.5а) положить $\varphi = uv$, то получается широко используемая *формула интегрирования по частям:*

$$\int_V u\nabla v\mathrm{d}V = \int_S u\mathbf{n}v\,\mathrm{d}S - \int_V v\nabla u\,\mathrm{d}V. \tag{2П.7}$$

Отметим, что здесь u и v можно считать произвольными тензорами.

Задача 14. *Получить с помощью* (2П.5а), (2П.5в) *теоремы Стокса:*

$$\int_S [\mathbf{n}\nabla\varphi]\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{\tau}\varphi\,\mathrm{d}l, \tag{2П.8а}$$

$$\int_S (\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{a})\mathrm{d}S = \oint_C (\boldsymbol{\tau}\mathbf{a})\mathrm{d}l, \tag{2П.8б}$$

где S — поверхность, натянутая на замкнутый контур C; $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к контуру и направленный по правому винту относительно $\mathbf{n}$ (*т. е. поверхность S является правоориентированной относительно контура C*). *Вывести* (2П.8а) из (2П.8б).

Указание: выбрать в качестве объема V бесконечно малый цилиндр.

Задача 15. *Вывести из теорем Стокса тождества:*

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0, \tag{2П.9}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv 0. \tag{2П.10}$$

Вектор $\mathbf{e}$, удовлетворяющий условию $\operatorname{rot}\mathbf{e}=0$, называется *потенциальным* или *безвихревым*. Как следует из (2П.9), в этом случае $\mathbf{e} = -\nabla\varphi$, где φ — произвольный скаляр (*скалярный потенциал*). Вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий условию $\operatorname{div}\mathbf{b}=0$, называется *соленоидальным*. В этом случае $\mathbf{b}=\operatorname{rot}\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — произвольный вектор (*векторный потенциал*).

Задача 16. *Убедиться, что для уравнений*

$$\nabla\varphi = \mathbf{e}(x), \quad \operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{b}(x), \quad \operatorname{div}\mathbf{d} = f(x),$$

где $\mathbf{e}(x)$, $\mathbf{b}(x)$ и $f(x)$ *суть заданные функции, наиболее общими решениями являются соответственно:*

$$\varphi=\int_0^1 \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}(\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda+\mathrm{const},\quad \mathbf{a}=\int_0^1 \lambda[\mathbf{b}(\lambda x)\mathbf{r}]\,\mathrm{d}\lambda+\nabla\psi,\quad \mathbf{d}=\mathbf{r}\int_0^1 \lambda^2 f(\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda+\mathrm{rot}\,\mathbf{c}$$

при произвольных $\psi(x)$ *и* $\mathbf{c}(x)$. *Найти условия на векторы* $\mathbf{e}(x)$ *и* $\mathbf{b}(x)$, *при которых эти решения существуют.*

Изучим теперь важнейший для приложений *оператор Лапласа* $\Delta\equiv(\nabla\nabla)$. Его особенность состоит в том, что он является *инвариантным* (скалярным) оператором как в применении к скалярной, так и к векторной функции. В применении к скаляру $\varphi(x)$ он определяется так:

$$\Delta\varphi\equiv\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi. \tag{2П.11}$$

Используя определения div и grad в произвольных координатах, имеем

$$\Delta\varphi=g^{-1/2}\partial_i\left(g^{1/2}\partial^i\varphi\right).$$

С другой стороны, $\partial_k\varphi=g_{ki}\partial^i\varphi$, откуда

$$\partial^i\varphi=\sum_{k=1}^{3} g_{ik}^{-1}\partial_k\varphi=g^{ik}\partial_k\varphi,$$

где g^{ik} — контравариантные компоненты метрического тензора, определяемые условием $g^{ik}g_{kj}=\delta^i_j$. Итак,

$$\Delta\varphi=g^{-1/2}\partial_i\left(g^{1/2}g^{ik}\partial_k\varphi\right). \tag{2П.12}$$

Задача 17. *Записать* $\Delta\varphi$ *в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.*

В применении к вектору $\mathbf{a}$ оператор Δ определяется следующим образом:

$$\Delta\mathbf{a}\equiv\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}. \tag{2П.13}$$

Задача 18. *Показать, что в декартовых координатах* $(\Delta\mathbf{a})_i=\Delta a_i\equiv\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,a_i$, *т. е.* (2П.13) *согласуется с* (2П.11). *Найти физические компоненты вектора* $\Delta\mathbf{a}$ *в цилиндрических и сферических координатах.*

Задача 19. *Используя разложение скалярной функции* φ *в ряд Тейлора*

$$\varphi(\mathbf{r}+\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\xi\nabla)^n\varphi(\mathbf{r}),$$

доказать справедливость следующего представления для $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r})=\lim_{a\to 0}\frac{10}{a^2}\Delta_a\varphi(\mathbf{r}), \tag{2П.14}$$

где $\Delta_a\varphi$ — *среднее уклонение функции* φ *в объеме шара радиуса* a *с центром в точке* $\mathbf{r}$, *т. е.*

$$\Delta_a\varphi(\mathbf{r})\equiv\frac{3}{4\pi a^3}\int_{V_a}[\varphi(\mathbf{r}+\xi)-\varphi(\mathbf{r})]\,\mathrm{d}V_\xi.$$

В приложениях часто приходится иметь дело с гармоническими функциями. Функция φ называется *гармонической* в области V, если внутри нее она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$. Важным свойством гармонической в области V функции является то, что она принимает свои наименьшее и наибольшее значения на границе области V (*принцип максимума*).

Задача 20. *Доказать принцип максимума, пользуясь* (2П.14).

Обратим внимание на важное свойство сферических средних, часто используемое при решении уравнений, содержащих оператор Лапласа. ***Сферическим средним*** некоторой функции $\varphi(\mathbf{r})$ называется величина

$$\langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_a = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{|\xi|=1} \varphi(\mathbf{r}+a\xi)\,\mathrm{d}S_\xi, \tag{2П.15}$$

представляющая собой среднее значение функции $\varphi(\mathbf{r})$ на сфере радиуса a с центром в точке $\mathbf{r}$.

Задача 21. *Показать, что*

$$\Delta \langle \varphi \rangle_a = \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left(a \langle \varphi \rangle_a\right). \tag{2П.16}$$

Замечая, что $\varphi(\mathbf{r}) = \lim\limits_{a\to 0} \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_a$, выводим из (2П.16) еще одно интересное представление для оператора Лапласа:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[a \langle \varphi(\mathbf{r}) \rangle_a\right]. \tag{2П.17}$$