

1.1. Следует учесть, что вблизи электродов диссоциация молекул идет более интенсивно, чем рекомбинация ионов. Пусть сила тока ионов, рождающихся у катода, равна $I_k^+ = I_k^-$, а у анода $I_a^+ = I_a^-$. На катоде нейтрализуются рожденные положительные ионы I_k^+ и приходящие от анода I_a^+ , т. е. сила катодного тока равна $I_k^+ + I_a^+ = I$. Аналогично, на аноде $I_a^- + I_k^- = I$, и через сечение AB течет ток $I_a^+ + I_k^- = I_a^- + I_k^+ = I$.

1.2. Приравнивая нулю силу, действующую со стороны равномерно заряженной сферы радиуса r на заряд в точке $A(r_0 < r)$, имеем

$$\int_{-1}^{+1} \left(1 - \frac{r}{r_0} x\right) \frac{f(R)}{R} dx = 0,$$

где $R = (r_0^2 + r^2 - 2rr_0x)^{1/2}$, $x = \cos \vartheta$. Переходя к переменной интегрирования R , сводим уравнение к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial r_0} \int_{r-r_0}^{r+r_0} \frac{R}{rr_0} \Phi(R) dR = 0,$$

где $\Phi'(R) = f(R)$. Решение этого уравнения дает $\Phi(R) = a + b/R$, где a, b — постоянные интегрирования. Таким образом, $f(R) = -b/R^2$, и при всякой другой зависимости шар в опыте Кавендиша оставался бы заряженным.

1.3. В полярных координатах (рис. 1) уравнение линий напряженности имеет вид $(r_1^{-1} + r_2^{-1}) [l^2 - (r_2 - r_1)^2] = \text{const}$, где $r_{1,2} = (l^2/4 + r^2 \pm rl \cos \vartheta)^{1/2}$; вдали от зарядов $r^{-1} \sin^2 \vartheta = \text{const}$.

1.4. По закону Био — Савара — Лапласа, в точке P контура C_1 , охватывающего проводник C_2 с током, индукция магнитного поля равна

$$\mathbf{B} = -\frac{I}{c} \oint_{C_2} [\boldsymbol{\tau}_2 \mathbf{r}] \frac{dl_2}{r^3},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\boldsymbol{\tau}_2$ — единичный касательный вектор к C_2 . После скалярного умножения на постоянный

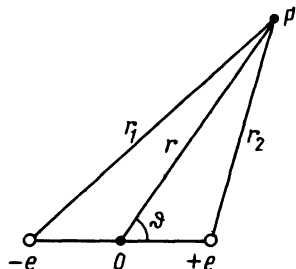


Рис. 1

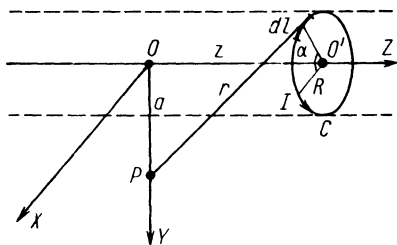


Рис. 2

вектор \mathbf{a} это выражение с учетом теоремы Стокса принимает вид

$$(\mathbf{aB}) = \frac{I}{c} \int_S (\mathbf{n} \operatorname{rot}_2 [\mathbf{ra}] r^{-3}) dS_2,$$

где $r \neq 0$, т. е. P не лежит на поверхности S , натянутой на C_2 . Из (2П.4г) выводим $\operatorname{rot}_2 [\mathbf{ra}] r^{-3} = -(\mathbf{a} \nabla) \mathbf{r} r^{-3}$, так что

$$(\mathbf{aB}) = -\frac{I}{c} (\mathbf{a} \nabla) \int_S (\mathbf{nr}) r^{-3} dS_2.$$

Отсюда, вводя элемент телесного угла $d\Omega = dS_2 (\mathbf{nr}) r^{-3}$, получаем (1.12). Учитывая неоднозначность функции $\Omega(\mathbf{r})$, изменяющейся на 4π при обходе C_1 , приходим к закону Ампера:

$$\oint_{C_1} (\mathbf{B} d\mathbf{l}_1) = -\frac{I}{c} \oint_{C_1} (\nabla_1 \Omega d\mathbf{l}_1) = \frac{4\pi}{c} I.$$

1.5. Приравняв нулю индукцию магнитного поля вне бесконечного прямого цилиндра радиуса R , приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial R} \int_0^\pi d\alpha \int_u^\infty \frac{r \Phi(r)}{(r^2 - u^2)^{1/2}} dr = 0,$$

где $\Phi'(r) = f(r)$, $u = (R^2 + a^2 + 2Ra \sin \alpha)^{1/2}$, $a > R$ (рис. 2). Решением этого уравнения является $r\Phi(r) = b = \text{const}$, т. е. $f(r) = -br^2$.

1.7. Если проводящий контур является четко определенным и топологически неизменным, то эквивалентность формулировок Максвелла и Фарадея следует из того, что при всяком изменении магнитного потока, связанного с контуром, линии индукции пересекают его. В противном случае верна лишь фарадеевская формулировка. Так, в опыте Фарадея (см. рис. 1.11) контур не является четко определенным, так как неизвестно, по какому пути следуют электроны внутри диска. Если же связать магнитный поток Φ с воображаемым контуром $OAGO$, то $d\Phi/dt = 0$, но э. д. с. индукции $\mathcal{E} \neq 0$, так как диск пересекает линии индукции, т. е. $\Delta\Phi \neq 0$. В опыте же с тороидом контур C гальванометра не является топологически неизменным, так как к нему прирастает петля челнока D . Поэтому, хотя $d\Phi/dt \neq 0$, все же $\mathcal{E} = 0$, так как контур C не пересекает линий индукции.

1.8. Если бы правило Ленца было неверным, то ток индукции был бы направлен так, что, взаимодействуя с магнитным полем, обеспечил бы дальнейший свой рост, а значит, и неограниченный рост связанной с ним энергии в противоречии с законом ее сохранения.

1.11. Приравняем работу A , совершаемую магнитным полем тока I над магнитным зарядом m при его медленном обносе вокруг тока, и работу A' возникающей при этом э. д. с. индукции:

$$A = m \oint_G (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = A' = \int \mathcal{E} I dt = \frac{I}{c} \Phi = \frac{4\pi m}{c} I,$$

где $\Phi = 4\pi m$ — магнитный поток полюса m .

2.1. Положить в (2.7) $\mathbf{j} = \rho \delta \mathbf{r} / \delta t$.

$$2.2. \mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV, \quad m = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_V [\mathbf{r} \mathbf{P}] dV + \int_V \mathbf{M} dV.$$

3.1. В сферических координатах из (3.7) выводим:

$$\delta(\mathbf{r}) = (2\pi r^2)^{-1} \delta(r) = -(2\pi r)^{-1} \delta'(r); \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \delta(r - a) \delta(\theta - \theta_a) \delta(\alpha - \alpha_a) / (r^2 \sin \theta).$$

3.3. Заменяя сингулярное выражение $\mathbf{r} r^{-3}$ на $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \mathbf{r} [r(r^2 + \alpha)]^{-1}$ и замечая, что $\operatorname{div}(\mathbf{r} r^{-3}) = 0$ при $r \neq 0$, преобразуем (3.7) по теореме о среднем и теореме Гаусса — Остроградского:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{V_\epsilon} \frac{f(\mathbf{r})}{4\pi} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r(r^2 + \alpha)} \right) dV = \frac{f(0)}{4\pi} \oint_{S_\epsilon} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{dS}{r^2 + \alpha} = f(0).$$

3.4. $E = E_r = \theta(r - a) Q r^{-2}$, где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, т. е. $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$. Для нахождения $E(r = a)$ вычисляем силу dF , действующую на элемент заряда dQ со стороны всех остальных зарядов, т. е. $E(r = a) = dF / dQ$. Но $dF / dQ = E - E^{\text{соб}}$, где $E = Q / a^2$ — напряженность поля вне сферы, $E^{\text{соб}} = Q / (2a^2)$ — напряженность собственного поля элемента заряженной поверхности, совпадающая вблизи этой поверхности с напряженностью поля равномерно заряженной бесконечной плоскости.

5.1. Взяв дивергенцию от (5.3), найдем $\partial(\operatorname{div} \mathbf{B}) / \partial t = 0$. Поэтому, если (4.6) верно при $t = 0$, то оно верно всегда.

6.1. Полагая $K \equiv \operatorname{div} E - 4\pi \rho$, из (6.3) находим $\partial K / \partial t = -4\pi(\operatorname{div} \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t) \equiv 0$ с учетом (2.7). Поэтому если $K = 0$ при $t = 0$, то $K \equiv 0$. С учетом результата задачи **5.1** убеждаемся, что для отыскания полей \mathbf{E} и \mathbf{B} достаточно решить уравнения (5.3) и (6.3), т. е. система (6.4) непротиворечива.

6.2. В первом случае $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ и ρ , \mathbf{E} , \mathbf{B} суть функции от $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$. Поэтому вектор $\mathbf{X} \equiv \mathbf{B} - c^{-1}[\mathbf{v} \mathbf{E}]$, согласно (6.4), удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot} \mathbf{X} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{X} = c^{-2}(\mathbf{v} \nabla)(\mathbf{v} \mathbf{X})$ или $\mathbf{X} = \nabla \phi$ и $\Delta \phi = c^{-2}(\mathbf{v} \nabla)^2 \phi$. Для ограниченной системы зарядов $\mathbf{X} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому умножение последнего уравнения на ϕ и интегрирование по частям дает $\int [(\nabla \phi)^2 - c^{-2}(\mathbf{v} \nabla \phi)^2] dV = 0$. При $v < c$ подынтегральное выражение строго положительно, т. е. $\nabla \phi = \mathbf{X} \equiv 0$.

Во втором случае для вектора $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v} \mathbf{B}]$ получаем уравнения $\operatorname{div} \mathbf{Y} - c^{-2}(\mathbf{v} \nabla)(\mathbf{v} \mathbf{Y}) = 4\pi[\rho - c^{-2}(\mathbf{v} \mathbf{j})]$, $\operatorname{rot} \mathbf{Y} = 0$. Однако для равномерного движения зарядов необходимо, чтобы в тех точках, где $\rho \neq 0$, было $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v} \mathbf{B}]) = 0$, или $\mathbf{Y} = 0$. Но тогда в этих точках $\rho = c^{-2}(\mathbf{v} \mathbf{j})$, и всюду $\operatorname{div} \mathbf{Y} - c^{-2}(\mathbf{v} \nabla)(\mathbf{v} \mathbf{Y}) = 0$. Тем самым все сводится к первому случаю.

6.3. Согласно (6.7), в магнитном облаке, движущемся со скоростью \mathbf{u} , существует электрическое поле $\mathbf{E} = c^{-1}[\mathbf{B} \mathbf{u}]$. На частицу заряда e , входящую

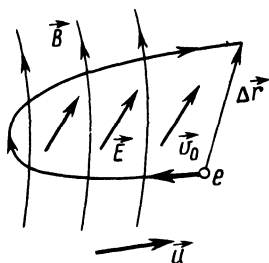


Рис. 3

а среднее значение $(\mathbf{u}\mathbf{v}_0)$ пропорционально $\int f(u)|\mathbf{u}-\mathbf{v}_0|(\mathbf{u}\mathbf{v}_0)d^3u < 0$.

13.2. Умножая (13.10) векторно на \mathbf{r} и интегрируя по объему V , занятому источниками (включая среду), находим

$$\varepsilon^{ijk} \int_V x_j \left(f_k^{\text{полн}} + \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} \right) dV = \varepsilon^{ijk} \int_V x_j \partial_l \theta_k^l dV. \quad (1)$$

Последний интеграл преобразуется интегрированием по частям:

$$-\varepsilon^{ijk} \int_V \Theta_{jk} dV + \varepsilon^{ijk} \int_S x_j n_l \Theta_k^l dS. \quad (2)$$

Левая часть (1) по второму закону динамики приводится к виду $(d/dt)(\mathcal{M}_{(m)}^i + \mathcal{M}_{(f)}^i)$, где $\mathcal{M}_{(m)}$ и $\mathcal{M}_{(f)}$ суть моменты импульсов источников и поля. Поэтому правая часть (1) должна сводиться к потоку момента импульса поля через окружающую поверхность S . Но тогда объемный интеграл в (2) должен исчезать, откуда $\Theta_{ik} = \Theta_{ki}$.

13.3. Интегрируя по поверхности S тела, находим $F = F_3 = \oint_S n_i \Theta_3^i dS = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[(\mathbf{n}\mathbf{B}) B_3 - \frac{1}{2} B^2 n_3 \right] dS \approx B^2 S_0 / (8\pi)$, где S_0 — площадь полюсов магнита.

14.1. Если \mathbf{u} — скорость перемещения провода с током, $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{u}$ — скорость свободного заряда e_i относительно провода, то плотность мощности силы Лоренца равна

$$\frac{1}{c\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i (\mathbf{v}_i [\mathbf{v}_i \mathbf{B}]) = \frac{1}{c\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \{ (\mathbf{u} [\mathbf{u}_i \mathbf{B}]) + (\mathbf{u}_i [\mathbf{u} \mathbf{B}]) \} \equiv \frac{1}{c} (\mathbf{u} [\mathbf{j} \mathbf{B}]) + \frac{1}{c} (\mathbf{j} [\mathbf{u} \mathbf{B}]) \equiv 0.$$

Первое слагаемое, очевидно, характеризует видимую работу магнитного поля над проводом с током, а второе — его невидимую работу по смещению зарядов в проводе, которую можно еще рассматривать как работу вихревого электрического поля $\mathbf{E} = c^{-1} [\mathbf{u} \mathbf{B}]$.

14.2. $q = (\mathbf{j} \mathbf{E}^{\text{тор}}) - \partial w / \partial t - \text{div} \mathbf{S}$.

$$17.1. \varphi(\mathbf{r}) = 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r' dr' + \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') (r')^2 dr'.$$

18.2. В сферических координатах (рис. 4)

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{ekK(k)}{\pi \sqrt{ar \sin \vartheta}}, \quad k^2 \equiv \frac{4ar \sin \vartheta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \vartheta}.$$

Так как $K(k) \approx \ln(4/\sqrt{1-k^2})$ при $k \approx 1$, то вблизи кольца ($\vartheta \approx \pi/2$, $r \approx a$) $\varphi \approx -[e/(\pi a)] \ln[r'/(8a)]$, где введено расстояние от точки наблюдения до кольца $r' = (a^2 + r^2 - 2ar \sin \vartheta)^{1/2}$.

Если $k \ll 1$, то $K(k) \approx (1 + k^2/4 + 9k^4/64 + \dots) \times \pi/2$, и вдали от кольца ($r \gg a$)

$$\varphi \approx \frac{e}{r} \left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^2}{4r^2} \sin^2 \vartheta + \dots \right).$$

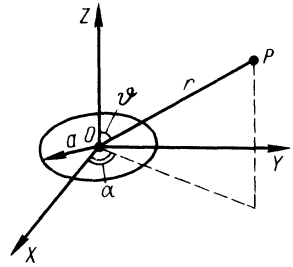


Рис. 4

19.4. Используя (19.9) и (19.13), находим

$$\mathbf{E}_2 = 3er^{-7} \{ 5\mathbf{r}(\mathbf{a}_1 \mathbf{r})(\mathbf{a}_2 \mathbf{r}) - r^2 [\mathbf{a}_2(\mathbf{a}_1 \mathbf{r}) + \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)] \}.$$

19.5. Если заряд сосредоточен в цилиндрической области с поперечным сечением S , то из (19.1) находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2 \int_S \rho(\mathbf{r}') \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| dS',$$

где \mathbf{r} — двумерный радиус-вектор. Отсюда по аналогии с (19.6) получаем мультипольное разложение ($r > a > r'$):

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} Q^{i_1 \dots i_l} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_l} \ln r,$$

где тензор мультипольного момента равен

$$Q^{i_1 \dots i_l} = \int_S \rho(\mathbf{r}') x'^{i_1} \dots x'^{i_l} dS' \quad (i_s = 1, 2).$$

Очевидным аналогом формулы (19.9) является

$$\varphi_l(\mathbf{r}) = (-1)^{l+1} 2\kappa \left[\prod_{i=0}^l (\mathbf{a}_i \nabla) \right] \ln r.$$

20.1. Согласно (20.3), вклад элемента $dS \mathbf{e}_r$ поверхности двойного слоя в потенциалы φ_{\pm} справа и слева от слоя равен $\pm 2\pi \tau(\mathbf{r})$. Если φ' — вклад всех остальных элементов, то $\varphi_{\pm} = \varphi' \pm 2\pi \tau(\mathbf{r})$, откуда и вытекает (20.5).

21.1. Учесть, что вблизи S' $\mathbf{P}^{\text{свнг}} = [\mathbf{P}] \theta \{ f(\mathbf{r}) \}$, $\mathbf{M}^{\text{свнг}} = [\mathbf{M}] \theta \{ f(\mathbf{r}) \}$, и использовать формулу $\theta'(x) = \delta(x)$.

22.1. Запишем для элемента векторной трубки поля \mathbf{D} (рис. 5) теорему Гаусса: $(\mathbf{n}_1 \mathbf{D}_1) dS_1 = (\mathbf{n}_2 \mathbf{D}_2) dS_2$. Вводя главные радиусы кривизны R_1 и R_2 поверхности проводника (рис. 6), имеем: $dS_1 = R_1 R_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, $dS_2 = (R_1 + dl)(R_2 + dl) d\alpha_1 d\alpha_2$. Поэтому $(\mathbf{n}_2 \mathbf{D}_2) - (\mathbf{n}_1 \mathbf{D}_1) = -2H(\mathbf{n}_2 \mathbf{D}_2) dl$, где $H = (R_1^{-1} + R_2^{-1})/2$ — средняя кривизна. При $dl \rightarrow 0$ получаем (22.12).

22.3. Используем сферические координаты ($\vartheta = 0$ — направление \mathbf{p}). Если диполь ориентирован вдоль или перпендикулярно плоскости раздела, то имеем соответственно:

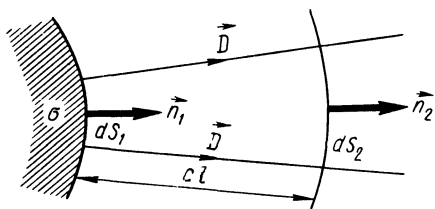


Рис. 5

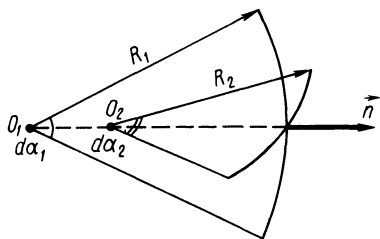


Рис. 6

$$1. \varphi = \frac{2p \cos \vartheta}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right), \quad \eta_i = \varepsilon_i \frac{6p \cos \vartheta}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^3} \quad (i=1, 2);$$

$$2. \varphi_i = \frac{p \cos \vartheta}{\varepsilon_i r^2} \left(1 - \frac{r^3}{a^3}\right), \quad \eta = \frac{3p}{a^3} \cos \vartheta \quad (i=1, 2).$$

В двумерном случае (цилиндрические координаты):

$$1. \varphi = \frac{4p \cos \alpha}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \eta_i = \varepsilon_i \frac{12p \cos \alpha}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2} \quad (i=1, 2);$$

$$2. \varphi_i = \frac{2p \cos \alpha}{\varepsilon_i r} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \eta = \frac{6p}{a^2} \cos \alpha \quad (i=1, 2).$$

23.1. При смещении заряда e_i на вектор $\delta \mathbf{r}$ энергия системы W'_e изменится на $e_i (\delta \mathbf{r} \nabla)^2 \varphi_i / 2$. Полученная квадратичная форма знакопеременна, так как сумма диагональных элементов ее матрицы равна $e_i \Delta \varphi_i / 2 = 0$. Поэтому положение равновесия системы зарядов не может быть устойчивым.

23.2. Пусть \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{E}' , \mathbf{D}' — соответственно поля до и после внесения диэлектрического образца. Из теоремы Гаусса — Остроградского $\int \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = 0$, так как $\text{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) = 0$. Поэтому изменение энергии поля равно $W'_e - W_e = \frac{1}{8\pi} \int [(\mathbf{D}' \mathbf{E}') - (\mathbf{D} \mathbf{E})] dV = \frac{1}{8\pi} \int (\varepsilon - \varepsilon') (\mathbf{E} \mathbf{E}') dV$, откуда и следует (23.13). Если в область V_0 вносится незаряженный проводник, то

$$W'_e - W_e = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D} \mathbf{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} [(\mathbf{D}' \mathbf{E}') - (\mathbf{D} \mathbf{E})] dV,$$

где V_1 — область, не занятая проводником. Применяя теорему Гаусса — Остроградского к области V_1 с границей S_1 , имеем

$$\int_{V_1} \mathbf{E}' \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = \int_{V_1} \varphi' \text{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV - \oint_{S_1} \varphi' \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dS = 0,$$

так как $\text{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) = 0$ и проводник нейтрален. Поэтому

$$W'_e - W_e = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D} \mathbf{E}) dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) dV < 0.$$

23.3. Из (23.8) и (19.13) находим энергию взаимодействия двух диполей $W'_e = -(\mathbf{p}\mathbf{E}') = -3(\mathbf{p}\mathbf{a})(\mathbf{p}'\mathbf{a})/a^5 + (\mathbf{p}\mathbf{p}')/a^3$, где \mathbf{E}' — напряженность поля диполя \mathbf{p}' (рис. 7). С помощью (23.15) находим:

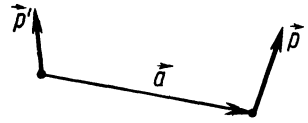


Рис. 7

$$\mathbf{F} = \frac{3}{a^7} \{5\mathbf{a}(\mathbf{p}\mathbf{a})(\mathbf{p}'\mathbf{a}) - a^2[\mathbf{p}(\mathbf{p}'\mathbf{a}) + \mathbf{p}'(\mathbf{p}\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{p}\mathbf{p}')]\},$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{p}\mathbf{E}'] = 3[\mathbf{p}\mathbf{a}](\mathbf{p}'\mathbf{a})/a^5 - [\mathbf{p}\mathbf{p}']/a^3.$$

24.1. Построим векторные трубки поля \mathbf{D} , соединяющие проводники с потенциалами φ_1, φ_2 и зарядами Q_1, Q_2 соответственно. По теореме Гаусса, $(\mathbf{nD})dS(\mathbf{r}) = 4\pi\eta_1 dS_1$, где η_1 — поверхностная плотность заряда на первом проводнике. Поэтому $\mathbf{D} = 4\pi\tau\eta_1 f(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E} = \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \mathbf{D}$, что позволяет записать разность потенциалов в виде $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\mathbf{D}_{12}} (\mathbf{E}\boldsymbol{\tau})d\mathbf{l} = 4\pi\eta_1 \int_{\mathbf{D}_{12}} (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\epsilon}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau})f(\mathbf{r})d\mathbf{l}$. Суммируя по всем взаимным векторным линиям \mathbf{D}_{12} , находим связанный с ними заряд первого проводника $Q_{12} = \int \eta_1 dS_1 = a_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$. В случае системы проводников, аналогично, $Q_{ik} = a_{ik}(\varphi_i - \varphi_k)$, откуда получаем соотношение $Q_i = \sum_{k \neq i} Q_{ik} = \sum_{k \neq i} a_{ik}(\varphi_i - \varphi_k)$, из которого и вытекает (24.4).

24.3. $Q_1 = Q_2 = Q(n-1)/(2n-1), Q_3 = Q/(2n-1)$.

24.4. В цилиндрических координатах $\varphi = a\alpha + b$, где a, b — постоянные. Поэтому емкость равна $C = S \sin(\beta/2) [2\pi\beta(d_2 - d_1)]^{-1} \ln(d_2/d_1)$.

24.5. Если при деформации конденсатора объем, занятый полем, изменился на δV , то изменение энергии поля равно $\delta W_e = [E^2/(8\pi)]\delta V = -Q^2\delta C/(2C^2)$. Поэтому $\delta C_1 = -a^2\delta V [4\pi b^2(b-a)^2]^{-1}$; $\delta C_2 = d(a+b) [4(a-b)]^{-1}$.

24.6. В сферических координатах $\varphi = C_1 \ln \theta(\vartheta/2) + C_2$, где $C_{1,2}$ — постоянные. Поэтому емкость равна $C = \frac{b-a}{2} \left[\ln \frac{\text{tg}(\beta/4)}{\text{tg}(\alpha/4)} \right]^{-1}$.

24.7. Изменение энергии поля при произвольном изменении распределения зарядов в проводниках равно

$$W'_e - W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D}'\mathbf{E}') dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} [(\mathbf{D}'\mathbf{E}') - (\mathbf{D}\mathbf{E})] dV,$$

где V_0 — область, занятая проводниками, а V_1 — диэлектриком. Как и в задаче 23.2, $\int_{V_1} \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = 0$, откуда

$$W'_e - W_e = \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{D}'\mathbf{E}') dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \epsilon(\mathbf{E}' - \mathbf{E})^2 dV > 0.$$

25.1. $\eta = 9\lambda E_0 \cos \vartheta / (4\pi)$; $\varphi(r < b) = 3\lambda E_0 r \cos \vartheta (a^3/r^3 - 1)\theta(r-a)$; $\varphi(r > b) = -E_0 r \cos \vartheta \{1 - (\lambda/r^3) [b^3(\epsilon - 1) + a^3(2\epsilon + 1)]\}$, где $\lambda \equiv [\epsilon + 2 + 2(\epsilon - 1)a^3/b^3]^{-1}$.

25.2. $\varphi(r < a) = 0$, $\varphi_1 = -E_0 r \cos \vartheta (1 - a^2/r^2)$, $\varphi_2 = -(\epsilon_1/\epsilon_2) E_0 r \cos \vartheta (1 - a^2/r^2)$; $\eta = 3\epsilon_1 E_0 \cos \vartheta / (4\pi)$.

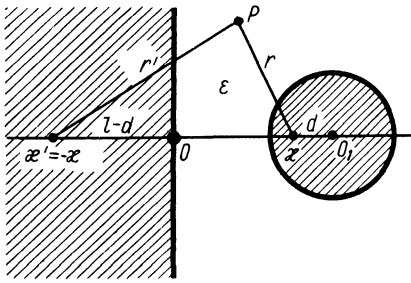


Рис. 8

$V_1 = V$ в среде 1 в область $V_2 = V$ в среде 2, вызывая локальное изменение проницаемости $\delta\epsilon \sim \delta N$, т. е. $\delta\epsilon_1 = -\delta\epsilon_2 < 0$. Так как поле при этом совершает работу, то его энергия уменьшится, т. е. $[\text{см. (23.13)}] 8\pi\delta W_c = -E_1^2\delta\epsilon_1 V_1 - E_2^2\delta\epsilon_2 V_2 = D^2 |\delta\epsilon_1| (\epsilon_1^{-2} - \epsilon_2^{-2}) V < 0$. Отсюда $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

28.1. В цилиндрических координатах имеем:

а) $j = j_z$, $B = B_z = 2I/(c r)$, $A = A_z = -(2I/c) \ln r$;

б) $j = j_\theta$, $B = B_z = (4\pi/c) n I \theta(a-r)$, $A = A_z = B r/2 + \theta(r-a) 2\pi n I a^2/(c r)$.

29.2. В сферических координатах (рис. 4) имеем:

$$A = A_\theta = \frac{2I}{kc} \left(\frac{a}{r \sin \vartheta} \right)^{1/2} \left[(2-k^2) K - 2E \right], \quad k^2 \equiv \frac{4ar \sin \vartheta}{a^2 + r^2 + 2ar \sin \vartheta}.$$

Вдали от тока ($k \ll 1$): $K \approx [1 + k^2/4 + 9k^4/64](\pi/2)$, $E \approx [1 - k^2/4 - 3k^4/64](\pi/2)$, т. е. $A \approx \frac{\pi a^2}{c(a^2 + r^2 + 2ar \sin \vartheta)^{3/2}} I r \sin \vartheta$. Вблизи от тока ($k \approx 1$): $E \approx 1$, $K \approx \ln(4/\sqrt{1-k^2})$, т. е. $A \approx (2I/c) [\ln(8a/r') - 2]$, где $r' = (a^2 + r^2 - 2ar \sin \vartheta)^{1/2}$ — расстояние от точки наблюдения до контура.

30.1. Магнитный потенциал имеет вид $\psi(r > a) = -a^3 (\mathbf{H}_0 \mathbf{r}) r^{-3}$, $\psi(r < a) = -(\mathbf{H}_0 \mathbf{r})$, где $\mathbf{H}_0 = -4\pi \mathbf{M}_0 (\mu + 2)^{-1} = \mathbf{H}(r < a)$.

30.2. $\psi = (\mathbf{m} \mathbf{r})/r^3 + (\mathbf{m}' \mathbf{r}')/(r')^3$, где $\mathbf{m}' = -\mathbf{m} + 2\mathbf{n}(\mathbf{m} \mathbf{n})$; \mathbf{n} — нормаль к стенке; r, r' — расстояния до магнита и его отражения соответственно.

31.1. Магнитный поток Φ , связанный со сверхпроводящим контуром C , не может измениться, ибо в сверхпроводнике $\mathbf{B} = 0$ и линии индукции не могут пересечь контур. Поэтому справедливо равенство (31.3), откуда $R = 0$.

31.2. $\mathbf{A} = [\mathbf{m} \mathbf{r}]/r^3 + [\mathbf{m}' \mathbf{r}']/(r')^3$, где $\mathbf{m}' = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}(\mathbf{m} \mathbf{n})$.

31.3. $A = A_z = -(2I\mu/c) \ln(r_1/r_2)$ (рис. 9; $d = l - \sqrt{l^2 - a^2}$).

31.4. $\mathbf{B}^{\text{нар}} = \mu\theta(r-a) \{ \mathbf{H}_0 [1 + a^3/(2r^3)] - 3\mathbf{r}(\mathbf{H}_0 \mathbf{r}) a^3/(2r^5) \}$, $\mathbf{B}^{\text{вн}} = \mu\theta(r-a) [\mathbf{H}_0 (1 + a^2/r^2) - 2\mathbf{r}(\mathbf{H}_0 \mathbf{r}) a^2/r^4]$.

31.5. Применим теорему Стокса к одной из линий индукции C , касающейся, согласно граничному условию $(\mathbf{n} \mathbf{B}) = 0$, поверхности сверхпроводника. Имеем

$$\oint_c (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \oint_c \mathbf{B} d\mathbf{l} = \int_s (\mathbf{n} \text{rot } \mathbf{B}) dS = 0,$$

так как поверхность S можно расположить вне образца благодаря его односвязности. Отсюда $\mathbf{B} \equiv 0$.

26.1. В диэлектрике $\varphi = -(2\kappa/\epsilon) \ln(r/r')$ (рис. 8), т. е. эквивалентно поле создается двумя параллельными нитями с зарядами $\pm \kappa$, положение которых ($OO_1 = l, d = l - \sqrt{l^2 - a^2}$) находится из (26.17). Потенциал цилиндра $\varphi_0 = (2\kappa/\epsilon) \ln(a/d)$, что позволяет вычислить энергию поля $W_c = \kappa\varphi_0/2$ и силу притяжения цилиндра к плоскости (на 1 см длины) $F = -\partial W_c/\partial l = -\kappa^2 a/(\epsilon \sqrt{l^2 - a^2})$.

27.1. Допустим, что под действием электрического поля в пограничном слое некоторое количество электронов δN перешло из области

$$32.2. L = 4\pi\mu N^2 (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2.$$

32.3. Согласно результату задачи 29.2, вблизи кольца $A = A_a = (2I/c) [\ln(8a/r_0) - 2]$, откуда $L = 4\pi a [\ln(8a/r_0) - 2]$.

32.4. Вначале сила поля растет линейно с напряженностью H_0 тока (рис. 10; участок OA), поскольку $\Phi = \pi a^2 H_0 - LI/c$, где $L = 4\pi a [\ln(8a/r_0) - 2]$. Но при $H_0 = H_A$ напряженность поля вблизи внешнего обода кольца, где она максимальна, станет равной $H_{кр}$ и кольцо перейдет в промежуточное состояние. При этом $H_{кр} = [2I/(cr_0)] + 2H_0$, т. е. поле складывается из поля тока $2I/(cr_0)$ и

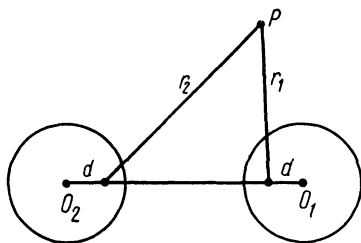


Рис. 9

внешнего поля $2H_0$ (см. задачу 31.4) — участок AB . Отсюда $H_A = \frac{1}{2} H_{кр} \left(1 + \frac{\pi a^2}{Lr_0}\right)^{-1}$. При

$H_0 \geq H_{кр}/2$ кольцо перестает быть сверхпроводящим и наведенный в нем ток отсутствует (участок BCB). С убыванием поля, т. е. при $H_0 < H_{кр}/2$, кольцо вновь переходит в промежуточное состояние, когда напряженность поля вблизи внутреннего обода равна $H_{кр} = 2H_0 - 2I/(cr_0)$ (участок BD). В самом деле, если бы при этом кольцо было сверхпроводящим, то магнитный поток через него был бы постоянным: $\Phi = \pi a^2 H_0 - LI/c = \pi a^2 H_{кр}/2$, откуда $I = (2H_0 - H_{кр}) \pi a^2 c / (2L)$, и вблизи внутреннего обода $H = 2H_0 - 2I/(cr_0) = 2H_0 - (2H_0 - H_{кр}) \pi a^2 / (Lr_0)$. Оценим разность $H - H_{кр} = (2H_0 - H_{кр}) \times [1 - \pi a^2 / (Lr_0)]$. Положив $x \equiv a / (4r_0)$, имеем $y \equiv \pi a^2 / (Lr_0) = x (\ln 32x - 2)^{-1} > x (\ln x + 1.5)^{-1}$, так как $\ln 32 < 3.5$. Таким образом, уже при $x > 3$ будет $y > 1$ и $H > H_{кр}$, т. е. достаточно тонкое кольцо не будет сверхпроводящим.

32.5. Так как при внесении магнетика $\text{rot}(\mathbf{H}' - \mathbf{H}) = 0$, то $\mathbf{H}' - \mathbf{H} = \nabla\chi$ и $\int \mathbf{B}' \cdot (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) dV = - \int \chi \text{div} \mathbf{B}' dV = 0$. Аналогично получаем $\int \mathbf{B}' \cdot (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) dV = 0$, откуда и следует (32.21).

Если в область V_0 с границей S_0 вносится сверхпроводник, то

$$W'_m - W_m = - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{B}\mathbf{H}) dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} [(\mathbf{B}'\mathbf{H}') - (\mathbf{B}\mathbf{H})] dV,$$

где V_1 — область, не занятая сверхпроводником. Поскольку $(\mathbf{nB}')|_{S_0} = 0$ и $\mathbf{H}' - \mathbf{H} = \nabla\chi$ в области V_1 , то

$$\int_{V_1} \mathbf{B}' \cdot (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) dV = - \int_{V_1} \chi \text{div} \mathbf{B}' dV - \oint_{S_0} (\mathbf{nB}') \chi dS = 0.$$

В результате

$$W'_m - W_m = - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} (\mathbf{B}\mathbf{H}) dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{B}' - \mathbf{B}) \times (\mathbf{H}' - \mathbf{H}) dV < 0.$$

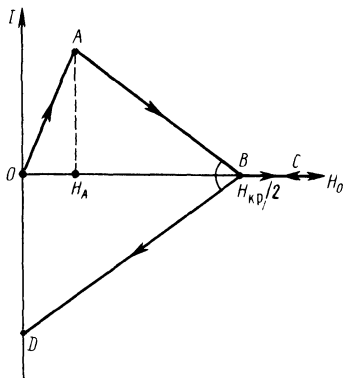


Рис. 10

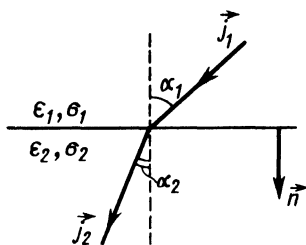


Рис. 11

33.1. Сопоставим точечному магнитному моменту \mathbf{m} плотность тока $\mathbf{j} = c \operatorname{rot} \{ \mathbf{m} \delta(\mathbf{r}) \}$. Энергия его взаимодействия с магнитным полем $\mathbf{B}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{A}_0$ равна $W'_m = - \int (\mathbf{j} \mathbf{A}_0) dV = (\mathbf{m} \mathbf{B}_0)$. Отсюда (см. задачу **23.3**) $\mathbf{F} = \nabla W'_m = (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{B}_0$, $\mathbf{L} = [\mathbf{m} \mathbf{B}_0]$.

34.1. Из уравнений (34.8) и (34.9) находим (рис. 11)

$$\sigma_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 = \sigma_2 \operatorname{ctg} \alpha_2, \quad 4\pi\eta = (\mathbf{n} \mathbf{j}) (\varepsilon_2 / \sigma_2 - \varepsilon_1 / \sigma_1).$$

35.1. Для любого сечения трубки тока, соединяющей проводники с потенциалами φ_1 и φ_2 , $(\mathbf{n} \mathbf{j}) dS = (\mathbf{n}_1 \mathbf{j}_1) dS_1$, где dS_1 — элемент поверхности первого проводника. Выбирая $\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{j} / j$, находим $\mathbf{E} = \hat{\sigma}^{-1} \cdot \mathbf{j} = j_1 f(\mathbf{r}) (\hat{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau})$, где $f(\mathbf{r}) = dS_1 / dS(\mathbf{r})$. Интегрируя \mathbf{E} вдоль линии тока, находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\mathbf{E} d\mathbf{l}) = j_1 \int_1^2 f(\mathbf{r}) (\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\sigma}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\mathbf{l}.$$

Суммируя j_1 по всем линиям тока, связывающим проводники, получим $\int j_1 dS_1 \equiv I_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) b_{12}$, где b_{12} задается (35.6). Для произвольного набора проводников $I_i = \sum_k I_{ik} = \varphi_i \left(b_{i0} + \sum_{k \neq i} b_{ik} \right) - \sum_{k \neq i} b_{ik} \varphi_k$, где b_{i0} относится к линиям тока, уходящим в бесконечность. Отсюда и вытекает представление (35.5).

35.2. Если заданы силы I_i токов, стекающих с электродов S_i , то при любом изменении распределения токов в проводящей области V

$$\int_V \mathbf{E} \cdot (\mathbf{j}' - \mathbf{j}) dV = \int_V \varphi \operatorname{div} (\mathbf{j}' - \mathbf{j}) dV + \sum_i \oint_{S_i} \varphi \mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}' - \mathbf{j}) dS = 0.$$

Поэтому изменение джоулевых потерь равно

$$\int_V [(\mathbf{j}' \mathbf{E}') - (\mathbf{j} \mathbf{E})] dV = \int_V \sigma (\mathbf{E}' - \mathbf{E})^2 dV > 0.$$

36.1. Записывая закон Ома в виде $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{v} \mathbf{B}])$, где $\mathbf{v} = (0, 0, -v)$ — скорость электронов проводимости, находим поле внутри провода в цилиндрических координатах: $B = B_z = 2\pi r j / c$, $E_r = -2\pi r j v / c^2$; $E_z = j / \sigma$, — и вектор Пойнтинга: $S_r = -r j^2 / (2\sigma)$, $S_z = -\pi r^2 j^2 v / c^2$, что соответствует плотности заряда $\rho = (\mathbf{v} \mathbf{j}) / c^2$, где $j = j_z = I / (\pi a^2)$. Потенциал вне провода $\varphi = j \left(\frac{\pi a^2 v}{c^2} - \frac{z}{\sigma} \right) \frac{\ln(r/r_0)}{\ln(a/r_0)}$, что соответствует поверхностной плотности заряда $\hat{\eta} = -j (\pi a^2 v / c^2 - z / \sigma) [4\pi a \ln(a/r_0)]^{-1} + a j v / (2c^2)$.

37.1. Противоречия с законом сохранения заряда не возникает, если записать (37.4) в виде $-dQ/dt = 4\pi\sigma Q / \varepsilon \equiv \sigma \oint (\mathbf{n} \mathbf{E}) dS$ — сила тока сквозь бесконечную сферу.

38.3. В цилиндрических координатах имеем ненулевые компоненты поля:

$$\mathbf{X} = (E_r, E_z, B_z) = \operatorname{Re} \int_0^\infty \exp(-i\Phi) f(\lambda) (1 - \lambda^2 / k^2)^{1/2} \mathbf{Y} d\lambda,$$

где $\Phi = \omega t - (k^2 - \lambda^2)^{1/2} z$, $\mathbf{Y} = (i(k^2 - \lambda^2)^{1/2} J_1, -\lambda J_0, ik, J_1)$, $k = \omega/c$, $J_0, 1(\lambda r)$ — функции Бесселя, а функция $f(\lambda)$ определяется из $\mathbf{X}(z=0)$.

$$39.1. \quad \tilde{w} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \sum_{r,s=1}^2 (E_r^{(s)})^2,$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{s} \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sum_{r,s=1}^2 (-1)^{r+1} (E_r^{(s)})^2.$$

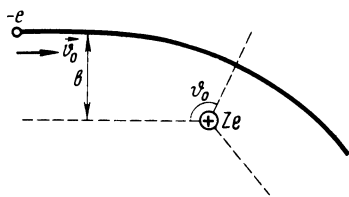


Рис. 12

39.2. Учитывая, что энергия волнового пакета $W = \int w dV$ есть интеграл движения, и используя теорему Умова — Пойнтинга $\partial w / \partial t + \text{div } \mathbf{S} = 0$, имеем $\mathbf{v} = d\mathbf{R}/dt = W^{-1} \int \mathbf{r} (\partial w / \partial t) dV = -W^{-1} \int \mathbf{r} \text{div } \mathbf{S} dV = W^{-1} \int \mathbf{S} dV$, т. е. центр масс пакета движется с постоянной скоростью \mathbf{v} (так как $\int \mathbf{S} dV$ — интеграл движения).

Так как $|\mathbf{S}| \leq cEH/(4\pi) = 2\sqrt{\varepsilon\mu} EHv_\phi/(8\pi) \leq (\varepsilon E^2 + \mu H^2)v_\phi/(8\pi) = v_\phi w$, то $v \leq v_\phi$. Если волновой пакет движется в вакууме как единое целое, то $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где $v \leq c$. Если $v < c$, то из теорем Томсона (6.6) и (6.7) выводим: $c\mathbf{E} = [\mathbf{B}\mathbf{v}]$, $c\mathbf{B} = [\mathbf{v}\mathbf{E}]$, т. е. $\mathbf{E}(v^2 - c^2) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) = 0$, или $\mathbf{E} \equiv 0$, что невозможно. Поэтому остается принять, что $v = c$. Но в таком случае $\mathbf{S} = c\mathbf{w}$, $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$, $E = B$ и плотность импульса $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2 = w\mathbf{c}/c^2$, откуда и вытекает (39.15). Заметим, что если пакет движется вдоль оси Z , то напряженность $\mathbf{E}(\mathbf{r} - ct)$ поля удовлетворяет уравнению $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\mathbf{E} = 0$, т. е. двумерному уравнению Лапласа. Поэтому если $\mathbf{E}(x, y \rightarrow \infty) = 0$, то по принципу максимума $\mathbf{E} = 0$. Это означает, что в поперечном направлении пакет не должен быть ограниченным, т. е. $\mathbf{E}(x, y \rightarrow \infty) \neq 0$. Как следует из (16.12), такое поле должно иметь вид $\mathbf{E}(z - ct)$ (плоская волна).

40.1. Если $E_{x0} = A$ — амплитуда падающей волны, то $E'_x = A \cos \Phi \exp(-\chi)$, $E'_z = -E'_x \text{tg } \Phi (1 - \sin^2 \alpha_0 / \sin^2 \alpha)^{-1/2}$, $B' = B'_y = n'A (\sin^2 \alpha / \sin^2 \alpha_0 - 1)^{-1/2} \sin \Phi \exp(-\chi)$, где $\chi = k'z (\sin^2 \alpha / \sin^2 \alpha_0 - 1)^{1/2}$, $\Phi = k'x (\sin \alpha / \sin \alpha_0) - \omega t$.

Векторные линии $\mathbf{S}' = c\mathbf{B}'(-E'_z, 0, E'_x)/(4\pi)$ описываются уравнением $\chi = (1 - \sin^2 \alpha_0 / \sin^2 \alpha) \ln |\sin \Phi / \sin \Phi_0|$, $\Phi_0 = \text{const}$. Таким образом, энергия периодически [с периодом $\Delta x = (\pi/k') \sin \alpha_0 / \sin \alpha$] втекает в менее плотную среду и вытекает из нее, перемещаясь также вдоль границы раздела.

40.2. Для монохроматических волн металл можно рассматривать как среду с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \equiv \varepsilon' + i4\pi\sigma/\omega$. Поэтому, полагая в (40.13) $\kappa = \sqrt{\varepsilon}$, имеем $\mathcal{R} = |(\sqrt{\varepsilon} - 1)/(\sqrt{\varepsilon} + 1)|^2$ или для $\sigma \gg \omega$ $\mathcal{R} \approx 1 - \sqrt{2\omega/(\pi\sigma)}$.

Для расчета давления света на зеркало используем (39.20), полагая $\mathbf{V} = [s\mathbf{E}]$ и $\mathbf{V}'' = [s''\mathbf{E}''] = -[s\mathbf{E}'']$: $p = \tilde{w} = (\mathbf{E} + \mathbf{E}'')^2/(8\pi) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}'')^2/(8\pi) = \tilde{E}^2(1 + \mathcal{R})/(4\pi)$.

43.1. Согласно (13.4) и (13.56), импульс, уносимый излучением в одну секунду, с учетом (43.6) равен

$$\oint_S (\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}) dS = \oint_S \mathbf{n} [B^2/(4\pi)] dS = \oint_S \mathbf{n} [n\dot{\mathbf{p}}]^2 d\Omega/(4\pi c^4) = 0.$$

43.2. Орбитой электрона будет гипербола (рис. 12) $p/r = 1 + \varepsilon \cos(\vartheta - \vartheta_0)$, где $\varepsilon = (1 + 4E^2 b^2/\alpha^2)^{1/2}$, $p = 2b^2 E/\alpha$, $\alpha = Ze^2$, $E = m_0 \cdot v_0^2/2$, $\text{tg } \vartheta_0 = -2Eb/\alpha$. Считая излучение слабым, используем интеграл движения $r^2 \dot{\vartheta} = bv_0$ и запишем потери энергии на излучение в виде

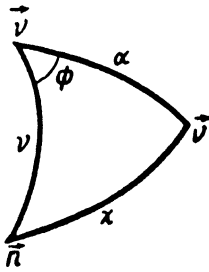


Рис. 13

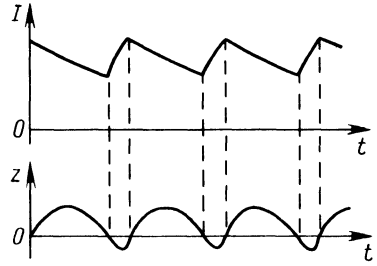


Рис. 14

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^2}{3c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 dt = \frac{4e^2}{3m_e^2 c^3 b v_0} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{r^2} = \frac{Z^4 e^{10}}{3m_e^2 c^3 b^5 E^2 v_0} \left[\vartheta_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{2E^2 b^2}{Z^2 e^4} \right) + \frac{3Eb}{Ze^2} \right].$$

В случае рассеяния на малые углы $Eb \gg \alpha$ и получается известная формула Бора $\Delta W \approx \pi Z^2 e^6 / (3m_e^2 c^3 b^3 v_0)$.

44.1. Используя потенциалы Герца, из (44.14) выводим $\varphi = c^{-1}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{I}})$, $\mathbf{A} = c^{-1}\dot{\mathbf{I}} - c^{-1}[\mathbf{n}\dot{\mathbf{Z}}]$, откуда и следует (44.16).

44.2. В указанном приближении $\mathbf{A} \approx (\mathcal{M} + c^{-1}\mathcal{M}'n_i)/r$, откуда $P_1 = \frac{2}{3c}(\dot{\mathcal{M}})^2 + \frac{1}{c^3} \langle [\mathbf{n}\ddot{\mathcal{M}}^i] \cdot [\mathbf{n}\ddot{\mathcal{M}}^k] n_i n_k \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по углам. Умножая (44.2) на x^i и интегрируя по объему, находим $\mathcal{M} = \dot{\mathbf{p}}/c$, а после умножения (44.2) на $x^i x^k$ и интегрирования получаем $\mathcal{M}'n_i = -[\mathbf{nm}] + \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{Q}}/(2c)$, где $\hat{\mathbf{Q}}$ — тензор квадрупольного момента системы. В результате второе слагаемое в мощности излучения преобразуется к виду $\frac{1}{c^3} \langle [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}]^2 + \frac{1}{4c^2} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}]^2 + \frac{1}{c} (\ddot{\mathbf{m}} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}]) \rangle$. Но последнее слагаемое исчезает, так как с учетом симметричности тензора $\hat{\mathbf{Q}}$ и равенства $3\langle n_i n_k \rangle = \delta_{ik}$ оно сводится к $\hat{\mathbf{Q}}^{ik} \ddot{m}^l \epsilon_{kli} \equiv 0$. При вычислении скаляра $K \equiv \langle [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n}]^2 \rangle$ используем в качестве осей координат главные оси тензора $\ddot{\mathbf{Q}}$, в которых $\ddot{\mathbf{Q}}^{ik} = \ddot{Q}^i \delta^{ik}$. Поэтому $K = \ddot{\mathbf{Q}}^i \ddot{\mathbf{Q}}^k \langle n_i n_k - n_i^2 n_k^2 \rangle = \ddot{Q}^i \ddot{Q}_i / 5 - \left(\sum_i \ddot{Q}^i \right)^2 / 15$, так как $15\langle n_i^2 n_k^2 \rangle = 1 + 2\delta_{ik}$. Отсюда и вытекает (44.20).

46.1. Для получения P_1 и P_E нужно проинтегрировать по сфере выражения (46.15) и (46.17). Из сферического треугольника, натянутого на векторы \mathbf{v} , $\dot{\mathbf{v}}$, \mathbf{n} (рис. 13), находим $\cos \chi = \cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha \cos \varphi$. Поэтому усреднение по углу φ даст $\langle (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}})^2 \rangle_\varphi = (\dot{\mathbf{v}})^2 (\mathbf{n}\mathbf{v})^2 / v^2 + [1 - 3(\mathbf{n}\mathbf{v})^2 / v^2] [\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}}]^2 (2v^2)^{-1}$, $\langle (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}) \cdot (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) \rangle_\varphi = (\mathbf{n}\mathbf{v})(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) / v^2$. Наконец, после усреднения по ϑ получаем (46.20) и (46.21).

46.2. Исследуя на максимум выражение $\langle dP_E / d\Omega \rangle_\varphi$, полученное в задаче **46.1**, приходим к уравнению $\lambda u^2 (\lambda + 1)^{-1} + 8u/3 + v^2/c^2 - 1 = 0$, где $u = 1 - (\mathbf{n}\mathbf{v})c/v^2$, $\lambda = \{c^2(\dot{\mathbf{v}})^2 / [\dot{\mathbf{v}}\dot{\mathbf{v}}]^2\} - 3c^2/(2v^2) - 1/2$. Из этого уравнения с учетом того, что при $v \approx c$ (рис. 13) $\lambda \approx \text{ctg}^2 \alpha - 1$, $\lambda + 1 \approx \text{ctg}^2 \alpha - 2^{-1}(1 - v^2/c^2)$, получается нужный результат.

46.3. Используя цилиндрические координаты и полагая $v = v_z$, $x \equiv z - v\zeta$, приводим уравнение (46.7) к форме $y(x) \equiv (r^2 + x^2)v^2/c^2 - (x - z + vt)^2 = 0$.

Проанализируем его решения в двух случаях: $v < c$ и $v > c$.

1. $v < c$. В этом случае корни равны

$$x_{1,2} = \gamma^2 \{ (z - vt) \pm (v/c) [(z - vt)^2 + r^2/\gamma^2]^{1/2} \}; \quad \gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Так как $y(z - vt) = (v^2/c^2) [r^2 + (z - vt)^2] > 0$, то $x_2 > z - vt > x_1$, и условию запаздывания $\zeta < t$ удовлетворяет лишь x_2 . Подстановка этого корня в потенциалы Льенара — Вихерта дает

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = e\gamma [r^2 + \gamma^2(z - vt)^2]^{-1/2}; \quad \mathbf{A} = \varphi\mathbf{v}/c.$$

2. $v > c$. В этом случае корни равны $x_{1,2} = v^2 \{ (vt - z) \pm (v/c) [(z - vt)^2 - r^2/v^2]^{1/2} \}; v \equiv [(v^2/c^2) - 1]^{-1/2}$. Так как $y(z - vt) > 0$, то условию запаздывания удовлетворяют оба корня, если $2^{-1}(x_1 + x_2) = -v^2(z - vt) > z - vt$, или $z < vt$. Отсюда $\varphi = 2ev [(z - vt)^2 v^2 - r^2]^{-1/2} \theta(vt - z - r/v)$, $\mathbf{A} = \varphi\mathbf{v}/c$. Это поле представляет собой коническую электромагнитную ударную волну, аналогичную сверхзвуковой ударной волне — конусу Маха.

47.1. $u = u_0 \exp [-2e^4 B^2 / (3m^3 c^5) t]$.

48.1. Для эллиптически поляризованной плоской волны

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{e} + i\alpha[\mathbf{se}]) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega t], \quad \mathbf{k} = \mathbf{s}\omega/c, \quad (\mathbf{es}) = 0, \quad \alpha \neq 1.$$

Согласно (48.1), (48.5) и (48.6), дифференциальное сечение равно

$$d\sigma = r_0^2 d\Omega [1 + (\mathbf{ne})^2(\alpha^2 - 1) + \alpha^2(\mathbf{ns})^2] (1 + \alpha^2)^{-1} \{1 + [2\omega r_0 / (3c)]^2\}^{-1},$$

полное же сечение совпадает с (48.8).

48.2. Добавляя силу $-k\mathbf{r} - m\gamma_0\mathbf{v}$ в правую часть (48.4) и повторяя выкладки § 48, вместо (48.8) получаем $\sigma(\omega) = \sigma_0 \omega^4 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2]^{-1}$, где $\omega_0^2 = k/m$, $\gamma = \gamma_0 + 2\omega^2 r_0 / (3c)$. Для атмосферы $\sigma(\omega)$ максимально при $\omega \approx \omega_0 \approx 10^{16} \text{ c}^{-1}$ (слабый ультрафиолет), а плотность потока $|\mathbf{S}_0(\omega)|$ солнечного света максимальна в зеленой части спектра. Поэтому мощность рассеянного света $P_1(\omega) = \sigma(\omega) |\mathbf{S}_0(\omega)|$ имеет максимум в промежуточной (голубой) области. Красный цвет заката объясняется тем, что в прямом солнечном свете сильно ослабляется после прохождения атмосферы фиолетовая часть спектра. Отметим, что в реальной атмосфере свет рассеивается на флуктуациях диэлектрической проницаемости.

50.1. Согласно (50.7) и задаче **30.1**, $\mathcal{E} = (\mathbf{m}\boldsymbol{\omega})/ac$, где $\mathbf{m} = \mathbf{M}_0 4\pi a^3 (\mu + 2)^{-1}$ — магнитный момент шара.

51.1. Обозначая через z координату свободного конца катушки и считая, что разрыв цепи происходит при $z = 0$, имеем

$$\Lambda = mz^2/6 - mgz/2 + LI^2/(2c^2), \quad \mathcal{D} = RI^2/2 - I\mathcal{E}\theta(-z),$$

где $L = a(l - z)^{-1}$, $a = 4\pi^2 N^2 r^2$. Уравнения движения имеют вид

$$2\ddot{z} + 3g = 3y^2/(ma), \quad \dot{y} + y(l - z)Rc^2/a = \mathcal{E}\theta(-z), \quad y \equiv LI/c^2.$$

График процесса представлен на рис. 14.

51.2. Из уравнений движения

$$Blu/c + L\dot{I}/c^2 = U - RI, \quad m\dot{u} = IBl/c - ku$$

находим для скорости стержня и к.п.д. оценки:

$$u < u_0 = [cU/(Bl)] [1 + kRc^2/(B^2l^2)]^{-1},$$

$$\eta < \eta_0 = mu_0^2/(2U \int Idt) = [u_0 Bl/(2cU)] [1 + ks/(mu_0)]^{-1} < \frac{1}{2}.$$

52.1. После скалярного умножения (52.3) на \mathbf{H} и интегрирования по частям с учетом граничных условий находим

$$\frac{2\sigma\mu\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V H^2 dV = - \int_V (\text{rot } \mathbf{H})^2 dV < 0, \text{ т. е. } \partial H/\partial t < 0.$$

52.2. Записав (52.10) в виде $I = E_0 \exp(-i\omega t) Z^{-1}$, находим импеданс $Z = (2\pi\sigma a \delta)^{-1}(1-i)$, откуда $L^{\text{внутр}}/c^2 = -\text{Im } Z/\omega = (2\pi\sigma a \delta \omega)^{-1}$.

54.1. Полагая в цилиндрических координатах $u = u_\alpha$, для B_r и B_z , согласно (54.5), получим уравнения $\partial B_r/\partial t = v_m(\Delta - r^{-2})B_r$, $\partial B_z/\partial t = v_m \Delta B_z$, из которых, как и в задаче **52.1**, вытекает, что B_r , B_z затухают с течением времени. Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ $[\mathbf{uB}] \rightarrow 0$ и (54.5) принимает вид $\partial \mathbf{B}/\partial t = v_m \Delta \mathbf{B}$, т. е. в соответствии с задачей **52.1** $\mathbf{B} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

54.3. $\mathbf{B} = (\alpha + \text{rot}) \text{rot } \mathbf{C}$, где \mathbf{C} удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + \alpha^2)\mathbf{C} = 0$. Согласно (54.23) и (54.5), векторный потенциал \mathbf{A} удовлетворяет уравнениям $\text{rot } \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A}$, $\partial \mathbf{A}/\partial t = [\mathbf{u} \text{rot } \mathbf{A}]$. Поэтому для его реальных вариаций $\delta \mathbf{A} = [\mathbf{u} \text{rot } \mathbf{A}] \delta t$, $(\delta \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{A}) = 0$ и вариация магнитной энергии в области V с границей S равна

$$\delta W_m = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot (\text{rot } \delta \mathbf{A} - \alpha \delta \mathbf{A}) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \delta \mathbf{A} \cdot (\text{rot } \mathbf{B} - \alpha \mathbf{B}) dV.$$

Здесь выполнено интегрирование по частям с учетом того, что $\delta \mathbf{A}|_S = 0$. Поэтому с учетом (54.23) $\delta W_m = 0$, т. е. бессильное поле реализует минимум энергии магнитного поля.

58.1. 1. Согласно (25.1), дипольный момент металлического шарика радиуса a равен $\mathbf{p} = a^3 \mathbf{E}$, т. е. $\alpha = a^3$. 2. Считая, что в атоме Томсона положительный заряд равномерно распределен по объему шарика радиуса a , находим возвращающую силу, возникающую при смещении электрона: $\mathbf{F} = -\mathbf{r}e^2/a^3$. Отсюда $\alpha = a^3$. 3. Усредняя по времени и по ориентациям орбиты уравнение движения электрона в атоме $m_e \ddot{\mathbf{r}} = -e^2 \mathbf{r}r^{-3} + e\mathbf{E}$ и полагая $\langle \mathbf{r}r^{-3} \rangle \approx a^{-3} \langle \mathbf{r} \rangle$, где $a = h^2/(m_e e^2)$ — борковский радиус атома водорода, находим $\langle \mathbf{r} \rangle = \mathbf{E} a^3/e$, т. е. опять $\alpha = a^3$. Строгий квантовый расчет дает $\alpha = 9a^3/2$.

58.2. Подстановка в граничные условия (22.9) потенциала $\phi(r < R) = -E'r \cos \vartheta$, $\phi(r > R) = \cos \vartheta (C/r^2 - Er)$ дает уравнения $E' = E - CR^{-3}$, $E' = \varepsilon (E + 2CR^{-3})$, разрешая которые приходим к (58.21).

58.3. Учитывая действительные силы Лоренца и центробежный эффект, находим напряженность действующего поля $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (4\pi/3)\mathbf{P} + m_e \omega \mathbf{r}(\Omega + \omega)/e$, где $\Omega = eB_0/(m_e c)$, и поляризованность $\mathbf{P} = N_e \alpha_n \mathbf{E}' = N_e \alpha_n [\mathbf{E} + m_e \omega \mathbf{r}(\Omega + \omega)/e] (1 - 4\pi N_e \alpha_n/3)^{-1}$. Отсюда $\rho^{\text{связ}} = -2N_e \alpha_n (m_e \omega/e)(\omega + \Omega)(1 + 8\pi N_e \alpha_n/3)^{-1}$, $\mathbf{E} = 2\pi \rho^{\text{связ}} \mathbf{r} \theta(a-r)$, $\eta^{\text{связ}} = -\rho^{\text{связ}} a/2$.

59.1. Момент силы Лоренца представим в виде $(e/c) [\mathbf{r} [\mathbf{vB}]] = [\mathbf{OK}] + \frac{d}{dt} \left(\frac{e}{2c} [\mathbf{r} [\mathbf{rB}]] \right)$, где $\mathbf{O} = -e\mathbf{B}/(2m_e c)$, $\mathbf{K} = m_e [\mathbf{r}\mathbf{v}]$. При усреднении по быстрым

электронным движениям последнее слагаемое исчезает и получается уравнение прецессии момента $\dot{\mathbf{K}}$ с угловой скоростью Ω (теорема Резаля): $\dot{\mathbf{K}} = [\Omega \mathbf{K}]$.

59.2. По Лоренцу и Онсагеру, имеем соответственно $\mu = (3 + 2\nu)(3 - \nu)^{-1}$, $\mu = [3\nu + 1 + 3(1 + 2\nu/3 + \nu^2)^{1/2}]/4$, где $\nu = (4\pi N_e/3) [m_0^2/(kT) - Ze^2 \langle r^2 \rangle / (2m_e c^2)]$.

61.1. Пусть $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$ — отклонение электрона от среднего положения г. Тогда поляризованность равна $\mathbf{P} = N_e e \mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{E} N_e e^2 / m_e$. С учетом квазинейтральности плазмы имеем $\rho_p = -\text{div } \mathbf{P} = \text{div } \mathbf{E} / (4\pi)$, т. е. $\dot{\rho}_p + \omega_p^2 \rho_p = 0$.

61.2. Учитывая, что энергия отдельного электрона равна $m_e(\omega^2 + \omega_c^2)r^2/2$, при усреднении получаем

$$\tilde{w} = \frac{1}{16\pi} (|\mathbf{E}\omega|^2 + |\mathbf{B}\omega|^2) + \frac{m_e}{4} N_e \int_0^\infty (\omega^2 + \omega_c^2) |\mathbf{r}_0|^2 f(\omega_c) d\omega_c,$$

что приводится к виду (61.33) в области прозрачности.

61.3. Выражение $\int \mathbf{r} \dot{\mathbf{E}}^2 dV$, пользуясь представлением δ -функции $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = (2\pi)^{-3} \int e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV$, запишем в форме

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \text{Re} \int \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}') e^{it(\dot{\omega}(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k}))} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} d^3k d^3k' dV = \\ & = -4\pi^3 \text{Re} \int \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) \cdot \dot{\mathbf{E}}_0(\mathbf{k}') e^{it(\dot{\omega}(\mathbf{k}') - \omega(\mathbf{k}))} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d^3k d^3k', \end{aligned}$$

что после интегрирования по частям сводится к следующему: $4\pi^3 t \int |\mathbf{E}_0(\mathbf{k})|^2 \exp[2\omega''(\mathbf{k})t] (\partial\omega'/\partial\mathbf{k}) d^3k$. Если $\omega''t \ll 2\pi$, то $\exp(2\omega''t) \approx 1$, поэтому $\xi(t) = \frac{t \int |\mathbf{E}_0|^2 (\partial\omega'/\partial\mathbf{k}) d^3k}{\int |\mathbf{E}_0|^2 d^3k}$. Учитывая, что функция $|\mathbf{E}_0(\mathbf{k})|$ отлична от нуля лишь в малой окрестности точки $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, приводим $\xi(t)$ с помощью теоремы о среднем к (61.36).

61.4. Согласно результату задачи 39.2 и с учетом сильной локализации функции $|\mathbf{E}_0(\mathbf{k})|$ вблизи $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ скорость центра масс волнового пакета записывается в виде $\mathbf{v} = W^{-1} \int \mathbf{S} dV = \tilde{\mathbf{S}}/\tilde{w}$, где в соответствии с (61.22) и (61.33)

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{k}_0 c^2}{8\pi\omega(\mathbf{k}_0)} |\mathbf{E}_0(\mathbf{k}_0)|^2, \quad \tilde{w} = \frac{1}{16\pi\omega} |\mathbf{E}_0(\mathbf{k}_0)|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon') \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}.$$

$$\text{Поэтому } \mathbf{v} = \frac{2\mathbf{k}_0 c^2}{\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \varepsilon')} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}.$$

62.1. $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{v} \mathbf{B}]$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

63.1. 1. Поляризованность и плотность тока в диэлектрике, движущемся со скоростью \mathbf{v} , имеют вид:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \mathbf{q}_i(t, \mathbf{r}); \quad \mathbf{J}^{\text{полн}} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \frac{d\mathbf{q}_i(t, \mathbf{r})}{dt} + \mathbf{v} \rho^{\text{полн}},$$

где $\mathbf{q}_i(t, \mathbf{r})$ — смещение заряда e_i относительно точки \mathbf{r} образца, выбранной центром ячейки ΔV . Поскольку $d\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{v}dt) - \mathbf{q}_i(t, \mathbf{r}) = dt [\partial/\partial t + (\mathbf{v} \nabla)] \mathbf{q}_i$,

то $\mathbf{j}^{\text{полн}} = \partial \mathbf{P} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{P} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P}$ и уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) + \frac{4\pi}{c} [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{P} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P}],$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}) = 0, \quad \mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right).$$

Отсюда, пренебрегая членами порядка v^2/c^2 , получаем уравнение $\Delta \mathbf{B} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + 2 \frac{1 - \varepsilon}{c^2} (\mathbf{v} \nabla) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ с решением в виде плоской волны $\mathbf{B} \sim \mathbf{e}^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, где $\mathbf{k} = \mathbf{s} \frac{\omega}{c} n \left[1 - \frac{2n}{c} (\mathbf{s} \mathbf{v}) \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]^{1/2}$, $n = \sqrt{\varepsilon}$, \mathbf{s} — единичный вектор. Фазовая скорость волны равна

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} \approx \frac{c}{n} + (\mathbf{s} \mathbf{v}) \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

2. Если рассмотреть движение отдельного фотона в неподвижном диэлектрике в течение времени Δt , то в среднем в течение времени $\Delta t/n$ фотон находится в свободном состоянии, двигаясь со скоростью c , все же остальное время он находится в поглощенном состоянии в атомах. Поэтому средняя скорость фотона равна c/n . Если диэлектрик движется со скоростью \mathbf{v} , то время свободного движения фотона в том же направлении равно $c \Delta t / [(c - v)n]$, длительность же поглощенного состояния останется прежней, т. е. $\Delta t(1 - 1/n)$. Таким образом, за время $\Delta T = \frac{c}{c - v} \frac{\Delta t}{n} + \Delta t \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ фотон пройдет путь $\Delta l = \frac{c}{c - v} \frac{\Delta t}{n} c + \Delta t \left(1 - \frac{1}{n} \right) v$, т. е. его средняя скорость равна $v_{\phi} = \Delta l / \Delta T \approx c/n + v(1 - n^{-2})$.

69.1. $l' = l_0 (1 - v^2/c^2)^{1/2} (1 - u^2/c^2)^{1/2} (1 - uv/c^2)^{-1}$.

69.2. В системе Σ' ширина отверстия $l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} < l_0$ и, казалось бы, стержень не сможет пройти сквозь него. Но если в системе Σ моменты прохождения концов стержня A и B через отверстие совпадают, то в системе Σ' они отличаются на $l_0 v/c^2$, т. е. сначала через отверстие проходит конец B , а затем A . Очевидно, что стержень при этом изогнется.

69.3. Расстояние останется неизменным. Преобразование Лоренца здесь неприменимо, так как начальное и конечное состояния системы, как не отвечающие тождественным объектам, не могут быть им связаны.

70.1. $\tau' = \tau (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (1 - uv/c^2)$, $\tau = \tau_0 (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.

70.2. Для движущихся часов вектор \mathbf{l} (см. рис. 70.3) переходит в $\Gamma = \mathbf{l} + \sin \alpha \mathbf{v} (\gamma^{-1} - 1) / v$, и для промежутков времени t_{\pm} , затрачиваемых световым импульсом на прохождение цилиндра соответственно туда и обратно, получаются уравнения $c^2 t_{\pm}^2 = v^2 t_{\pm}^2 + (l')^2 \pm 2(\mathbf{v} \mathbf{l}') t_{\pm}$. Отсюда $t_+ + t_- \equiv \tau' = 2l'/c$.

72.1. Пусть сторона AB в треугольнике ABC на плоскости Минковского (рис. 15) — наибольшая. Проведем через точку C две гиперболы CD и CE с центрами в точках A и B соответственно. Тогда (72.10) вытекает из того, что $|AC| = |AD|$ и $|CB| = |EB|$ по построению.

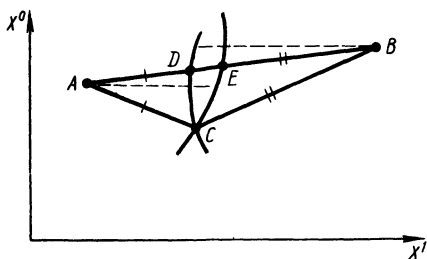


Рис. 15

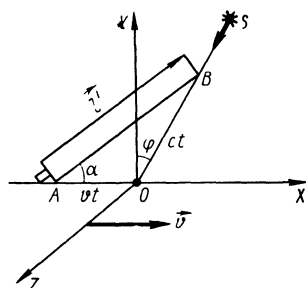


Рис. 16

73.2. Любой 4-вектор вида $c^\mu = a^\mu - \lambda b^\mu$, где λ — некоторый скаляр, является изотропным. Если в некоторой системе отсчета $b^0 \neq 0$, то, взяв $\lambda = a^0/b^0$, в той же системе отсчета получим $c^0 = 0$, $c^2 = (c^0)^2 = 0$, т. е. $c^\mu \equiv 0$, или $a^\mu = \lambda b^\mu$.

73.3. Согласно (19.8), $N = \sum_{s=2}^n C_{s+2}^2 = C_{n+3}^3$.

75.1. $u(t) = at(1 + a^2 t^2/c^2)^{-1/2}$, $u(\tau) = c \operatorname{th}(a\tau/c)$.

77.1. Вводя векторы \mathbf{l} и \mathbf{l}' , задающие положение неподвижной и движущейся зрительных труб соответственно, с учетом сокращения Лоренца — Фицджеральда имеем $\mathbf{l}' = \mathbf{l} + \mathbf{v}(\gamma^{-1} - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{l})v^{-2}$. Из треугольника AOB (рис. 16) находим $\cos^2 \alpha = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}')^2 / (v^2 l'^2) = (\beta^2 + 2\beta \sin \varphi + \sin^2 \varphi) (1 + \beta^2 + 2\beta \sin \varphi)^{-1}$. Отсюда, полагая $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}') = v / \sin \varphi'$, выводим основное уравнение абберации $\sin \varphi' = (\beta + \sin \varphi) (1 + \beta \sin \varphi)^{-1}$.

77.2. Различие в видимом A и истинном B положениях источника обусловлено запаздыванием светового сигнала. Из треугольника AOB (рис. 17) находим $\operatorname{tg} \varphi^* = (\beta + \sin \varphi) / \cos \varphi$. Как видно, угол φ^* отличается от угла φ в (77.8), определяющего в собственной системе источника (в положении A) направление, в котором должен быть испущен световой сигнал, чтобы достичь наблюдателя. В частности, в примере с двойной звездой, если скорости ее компонент равны $v = \beta c$, то в положении, когда они находятся на линии наблюдения, в соответствии

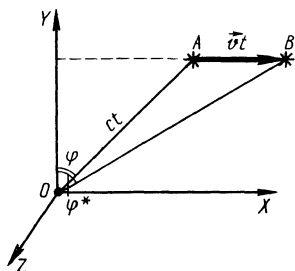


Рис. 17

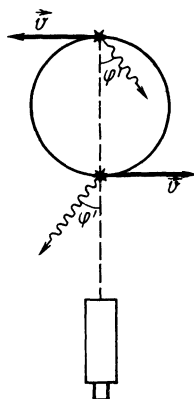


Рис. 18

с (77.8) $\sin \varphi' = \pm \beta$. Но это вовсе не означает, что видимый угловой размер звезды должен быть равным $2 \arcsin \beta$. Напротив, в этом положении он равен нулю, а под углами $\varphi' = \pm \arcsin \beta$ должны быть испущены фотоны, чтобы попасть к наблюдателю под углом $\varphi = 0$ (см. рис. 18).

77.3. Пусть \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности зеркала, \mathbf{v} — его скорость. Если в неподвижной системе падающий луч задается волновым 4-вектором $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{s}\omega/c)$, то отраженный луч описывается 4-вектором \tilde{k} с компонентами

$$\tilde{k}^0 = k^0 \left\{ 1 - \frac{2\gamma}{c} (\mathbf{n}\mathbf{v}) \left[(\mathbf{n}\mathbf{s}) - \frac{\gamma}{c} (\mathbf{n}\mathbf{v}) + \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{s}\mathbf{v})(\mathbf{n}\mathbf{v}) \right] \right\},$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = k^0 \left\{ \mathbf{s} - 2 \left(\mathbf{n} + \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{n}\mathbf{v})\mathbf{v} \right) \left[(\mathbf{n}\mathbf{s}) - \frac{\gamma}{c} (\mathbf{n}\mathbf{v}) + \frac{\gamma-1}{v^2} (\mathbf{s}\mathbf{v})(\mathbf{n}\mathbf{v}) \right] \right\}.$$

77.4. В среде с показателем преломления $n(\omega)$ волновой 4-вектор k для света, распространяющегося в направлении \mathbf{s} , имеет вид $k^\mu = \left\{ \frac{\omega}{c}, \mathbf{s} \frac{\omega}{c} n(\omega) \right\}$. Если среда движется относительно наблюдателя со скоростью \mathbf{v} и волновой 4-вектор в ее собственной системе есть k' , то в системе наблюдателя $k^0 = \gamma k'^0 [1 + (\mathbf{v}\mathbf{s}') n'/c]$, $\mathbf{k} = k'^0 [\mathbf{s}'n' + \mathbf{v}\gamma/c + (\gamma-1)n'(\mathbf{s}'\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2]$. Отсюда находим фазовую скорость света в системе наблюдателя при $[\mathbf{s}'\mathbf{v}] = 0$ и в линейном приближении по $\beta = v/c$:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \frac{1 + \beta n(\omega')}{n(\omega') + \beta} \approx \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Полученное выражение для коэффициента увлечения α отвечает условиям опыта Физо и впервые было найдено *Г. А. Лоренцем*. В общем случае α определяется способом вхождения света в движущуюся среду. Так, в опыте Физо свет сначала попадает в переходный слой неподвижной воды, прилегающий к трубе, т. е. можно считать, что источник света находится в самой среде. Однако в опытах с твердыми телами свет сразу входит в движущуюся среду. Поэтому в собственной системе среды для света вне ее $k^0 = \gamma k'^0 + \gamma k'^0 (\mathbf{s}'\mathbf{v})/c$, или $\omega' - \omega \approx -(\mathbf{s}'\mathbf{v})\omega/c$. Так что при $[\mathbf{s}'\mathbf{v}] = 0$ $\alpha = 1 - n^{-2} + [(dn/d\omega)\omega]/n^2$. Если же $(\mathbf{s}'\mathbf{v}) \neq 0$, то в линейном приближении $\alpha = 1 - n^{-2}$.

78.1. В собственной системе кругового тока $j^\mu = (0, \mathbf{j})$, а в неподвижной системе $j^\mu = \{(\mathbf{v}\mathbf{j}')\gamma/c, \mathbf{j}' + (\gamma-1)(\mathbf{v}\mathbf{j}')\mathbf{v}/v^2\}$. При вычислении дипольного момента $\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho dV$ кольца с током делаем замену переменных интегрирования $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + (\gamma^{-1} - 1)(\mathbf{v}\mathbf{r}')\mathbf{v}/v^2$, $dV = dV'\gamma^{-1}$ и полагаем $\mathbf{j}' dV' = I d\mathbf{l}'$. Простые вычисления дают $\mathbf{p} = I' c^{-2} S' [\mathbf{v}\mathbf{m}'] = c^{-1} [\mathbf{v}\mathbf{m}']$, где \mathbf{m}' — собственный магнитный момент кольца с током. При вычислении магнитного момента учитываем конвекционный ток с плотностью $\rho\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}(\mathbf{j} + \rho\mathbf{v})] dV = \mathbf{m}' + (\gamma^{-1} - 1)(\mathbf{v}\mathbf{m}')\mathbf{v}/v^2$.

80.1. Согласно (80.6) и (80.7), на элементарный заряд q действует сила $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{B}]) = eq\xi^{-3} [\mathbf{r}_\parallel - \mathbf{v}t + \mathbf{r}_\perp(1 - \beta^2)] = -\nabla\psi$, $\psi = eq(1 - \beta^2)/\xi$, где $\xi^2 = (x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - \beta^2)$. Поверхность $\psi = \text{const}$ является эллипсоидом Хевисайда: $\xi^2 = a^2(1 - \beta^2)$.

80.2. Если \mathbf{p}' — дипольный момент в собственной системе диполя и $\xi = \mathbf{r}_\parallel - \mathbf{v}t + \gamma^{-1}\mathbf{r}_\perp$, то $\mathbf{E} = \gamma^{-3}\xi^{-5} [3(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)(\mathbf{p}\xi) - \xi^2(\mathbf{p}'_\parallel + \gamma\mathbf{p}'_\perp)]$, $\mathbf{B} = c^{-1}[\mathbf{v}\mathbf{E}]$.

81.1. Характеристическое число λ матрицы F_V^μ является корнем уравнения $|F_V^\mu - \lambda \delta_V^\mu| = \lambda^4 - \lambda^2(E^2 - B^2) - (\mathbf{BE})^2 = 0$.

81.2. В первом случае $\mathbf{B} = c^{-1} [\mathbf{vE}]$, а во втором $\mathbf{E} = c^{-1} [\mathbf{Bv}]$, где $|\mathbf{v}| < c$.

82.1. С помощью (41.19) запаздывающее решение уравнений (82.5) запишем в виде $A^\mu(x) = 4\pi c^{-2} \int G^{\text{зан}}(x-x') j^\mu(x') d\Omega'$. Но с учетом (3.8) $G^{\text{зан}} = \theta(T) \delta(c^2 T^2 - R^2) c / (2\pi)$, откуда и следует (82.6).

Контурный интеграл в (82.7) сводится к вычету в полюсе $x'^0 = x^0 - R$, что приводит к обычному выражению для запаздывающих потенциалов.

82.2. Пользуясь инвариантной трехмерной δ -функцией (см. задачу 74.2), плотность 4-тока для точечного заряда e можно записать в виде $j^\mu(x) = e U^\mu(\tau) \delta(x - \xi(\tau) | \sigma(\tau))$, где τ — собственное время частицы, $x^\mu = \xi^\mu(\tau) - e e$ мировая линия, $\sigma(\tau)$ — пространственно-подобная гиперплоскость с нормалью $n^\mu = U^\mu/c$, проходящая через точку $\xi^\mu(\tau)$. Учитывая, что $[\text{см. (74.8)}] d\Omega' = cd\tau' d\sigma'$, преобразуем (82.6) к виду $A^\mu(x) = 2e \int \theta[x^0 - \xi^0(\tau')] U^\mu(\tau') \delta[(x - \xi(\tau'))^2] d\tau'$, где выполнено интегрирование по $d\sigma'$. Но $[\text{см. (3.8)}] \theta[x^0 - \xi^0(\tau')] \delta[(x - \xi(\tau'))^2] = \delta(\tau - \tau') [2(x^\mu - \xi^\mu(\tau)) U_\mu(\tau)]^{-1}$, где $\tau(x)$ — запаздывающий корень уравнения $(x - \xi(\tau))^2 = 0$. В результате получаем следующее ковариантное представление для потенциалов Льенара — Вихерта: $A^\mu(x) = e U^\mu(\tau) [(x^\nu - \xi^\nu(\tau)) U_\nu(\tau)]^{-1}$.

82.3. Вводя антисимметричные 4-тензоры

$$S^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ -P_1 & 0 & -M_3 & M_2 \\ -P_2 & M_3 & 0 & -M_1 \\ -P_3 & -M_2 & M_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad Z^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \\ -\Pi_1 & 0 & -Z_3 & Z_2 \\ -\Pi_2 & Z_3 & 0 & -Z_1 \\ -\Pi_3 & -Z_2 & Z_1 & 0 \end{vmatrix},$$

запишем уравнения (42.2), (42.4) и (42.6) в виде: $j^\nu = c \partial_\mu S^{\mu\nu}$, $A^\nu = \partial_\mu Z^{\mu\nu}$, $\square Z^{\mu\nu} = -4\pi S^{\mu\nu}$.

83.1. Из закона преобразования тензора (83.2) выводим:

$$\mathbf{P}' = \gamma \left(\mathbf{P} - \frac{1}{c} [\mathbf{vM}] \right) + \frac{1-\gamma}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{vP}); \quad \mathbf{M}' = \gamma \left(\mathbf{M} + \frac{1}{c} [\mathbf{vP}] \right) + \frac{1-\gamma}{v^2} \mathbf{v} (\mathbf{vM}).$$

Поэтому если в собственной системе среды $\mathbf{M}' = 0$, то в неподвижной системе $\mathbf{M} = c^{-1} [\mathbf{Pv}]$. То же получается и из уравнений Максвелла — Лоренца. Так, согласно задаче 63.1, в движущемся диэлектрике $\mathbf{j}^{\text{ном}} = \partial \mathbf{P} / \partial t + (\mathbf{vV}) \mathbf{P} - \mathbf{v} \text{div} \mathbf{P} = \partial \mathbf{P} / \partial t + \text{rot} [\mathbf{Pv}] \equiv \partial \mathbf{P} / \partial t + c \text{rot} \mathbf{M}$, откуда $\mathbf{M} = c^{-1} [\mathbf{Pv}]$.

83.3. 4-векторы j^μ и $F^{\mu\nu} U_\nu$ параллельны, так как в собственной системе среды они сводятся соответственно к векторам \mathbf{j} и $c\mathbf{E}$, связанным законом Ома $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Отсюда и следует (83.19).

83.4. $n_\mu [G^{\mu\nu}] = -(4\pi/c) i^\nu$, $n_\mu [\tilde{F}^{\mu\nu}] = 0$, где 4-векторы i , n имеют в собственной системе вещества компоненты $i^\mu = (c\eta, \mathbf{i})$, $n^\mu = (0, \mathbf{n})$.

84.1. Рассмотрим произвольную частицу с инертной массой m , энергией E и импульсом \mathbf{P} . Согласно предположению о распространении взаимодействия со скоростью света, любой акт взаимодействия включает в себя некоторый элементарный процесс с участием частиц, движущихся со скоростью света $\mathbf{u} = c$ (рис. 19). Так как для такого процесса выполняются законы сохранения энергии и инертной массы, то $dE + d\varepsilon = 0$; $dm + d\mu = 0$, где ε , μ и $\mathbf{p} = \mu c$ суть соответственно

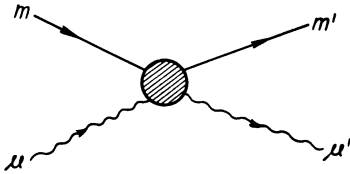


Рис. 19

энергия, инертная масса и импульс «световой» частицы. Так как $c^2 = c^2 = \text{const}$, то $(cde) = 0$ и из теоремы живых сил имеем $d\varepsilon = (cd\mathbf{p}) = c^2 d\mu$. Отсюда $dE = -d\varepsilon = -c^2 d\mu = -c^2 dm$, т. е. соотношение эквивалентности Эйнштейна. Далее, из теоремы живых сил выводим $dE = (\mathbf{u}d\mathbf{P}) = u^2 dm + 2^{-1} m du^2 = c^2 dm$. Решение этого дифференциального уравнения

имеет вид (84.8), где \mathcal{M} — постоянная интегрирования.

84.2. Рассмотрим элемент $d\Sigma_\mu$ гиперповерхности $\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu = \mathcal{M}^2 c^2$ в \mathcal{P} -пространстве, построенный на 4-векторах $d\mathcal{P}^\nu$, $d\mathcal{Q}^\sigma$, $d\mathcal{R}^\tau$. Так как $\mathcal{P}^\mu d\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}^\mu d\mathcal{Q}_\mu = \mathcal{P}^\mu d\mathcal{R}_\mu = 0$, то $d\Sigma_\mu = -\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} d\mathcal{P}^\nu d\mathcal{Q}^\sigma d\mathcal{R}^\tau \equiv N_\mu d\Sigma$, где $N_\mu = \mathcal{P}_\mu / (\mathcal{M}c)$ — 4-вектор нормали к гиперповерхности. Таким образом, времениподобные 4-векторы $d\Sigma^\mu$ и \mathcal{P}^μ параллельны, поэтому отношение их временных компонент есть инвариант. При этом $d\Sigma^0 / \mathcal{P}^0 = d\sigma_\mathcal{P}$, если выбрать $d\mathcal{P}^\nu = (d\mathcal{P}^0, d\mathcal{P}^1, 0, 0)$; $d\mathcal{Q}^\sigma = (d\mathcal{Q}^0, 0, d\mathcal{Q}^2, 0)$; $d\mathcal{R}^\tau = (d\mathcal{R}^0, 0, 0, d\mathcal{P}^3)$.

Далее, рассмотрим гиперповерхность в x -пространстве с элементом $d\sigma_\mu = -\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} dx^\nu dy^\sigma dz^\tau$, построенном на пространственноподобных 4-векторах dx^ν , dy^σ , dz^τ . Если выбрать $dx^\nu = (0, dx^1, 0, 0)$; $dy^\sigma = (0, 0, dx^2, 0)$, $dz^\tau = (0, 0, 0, dx^3)$, т. е. считать $d\sigma_\mu$ элементом гиперповерхности с нормалью $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$, то $d\Sigma_\mu d\sigma^\mu = d\Sigma_0 d\sigma^0 = d\Gamma$.

85.2. Пусть $\mathbf{E} = (0, 0, E)$; $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, а начальные условия при $\tau = 0$ имеют вид $x^\mu = 0$; $\mathcal{P}^\mu = (\mathcal{E}_0/c, \mathbf{p})$. Вводя обозначения $\omega \equiv eB / (\mathcal{M}c)$; $\lambda \equiv eE / (\mathcal{M}c)$, запишем уравнения Минковского (85.5): $\ddot{x}^0 = \lambda \dot{x}^3$; $\ddot{x}^1 = \omega \dot{x}^2$; $\ddot{x}^2 = -\omega \dot{x}^1$; $\ddot{x}^3 = \lambda \dot{x}^0$, обозначая точкой дифференцирование по t . Интегрирование с учетом начальных условий дает

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix} &= \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \begin{pmatrix} \text{sh } \lambda \tau \\ \text{ch } \lambda \tau \end{pmatrix} + \frac{cp_3}{eE} \begin{pmatrix} \text{ch } \lambda \tau - 1 \\ \text{sh } \lambda \tau \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\mathcal{M}\omega} \left[\sin \omega \tau \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (1 - \cos \omega \tau) \begin{pmatrix} p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

87.2. В данном случае $A^\mu = (Ze/|\mathbf{r}|, 0)$ и движение является плоским. Запишем уравнение Гамильтона — Якоби в полярных координатах r, α :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{Ze^2}{r} \right)^2 = c^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial S}{r \partial \alpha} \right)^2 + \mathcal{M}^2 c^4.$$

Используя два интеграла движения: энергии $\partial S / \partial t = -E = \text{const}$ и момента импульса $\partial S / \partial \alpha = K = \text{const}$, находим $S = K\alpha - Et + \int^r dr \left\{ r^2 \left(\frac{E^2}{c^2} - \mathcal{M}^2 c^2 \right) + 2E \frac{Ze^2}{c^2} r + \left(\frac{Z^2 e^4}{c^2} - K^2 \right) \right\}^{1/2}$.

Для определения траектории электрона положим $\partial S / \partial K = \alpha_0 = \text{const}$, т. е.

$$\alpha_0 = \alpha + K \int^r du \left[\frac{E^2}{c^2} - \mathcal{M}^2 c^2 + 2E \frac{Ze^2}{c^2} u + \left(\frac{Z^2 e^4}{c^2} - K^2 \right) u^2 \right]^{-1/2}.$$

1. Если $Ze^2/(Kc) \equiv \rho < 1$, то траектория имеет вид $r = p_1 [1 + \varepsilon_1 \cos \sqrt{1 - \rho^2} (\alpha - \alpha_0)]^{-1}$, где $\varepsilon_1 \equiv \rho^{-1} [1 - \mathcal{M}^2 c^4 (1 - \rho^2)/E^2]^{1/2}$; $p_1 \equiv Kc(1 - \rho^2)/\rho E$. Если $E < \mathcal{M}c^2$, то $\varepsilon_1 < 1$ и траектория «эллипсовидна» (вращающийся эллипс). Если $E = \mathcal{M}c^2$, то $\varepsilon_1 = 1$ и траектория «параболовидна» (инфинитное движение). Если $E > \mathcal{M}c^2$, то $\varepsilon_1 > 1$ и траектория «гиперболовидна»: электрон приходит из бесконечности, совершает несколько оборотов вокруг ядра и уходит в бесконечность.

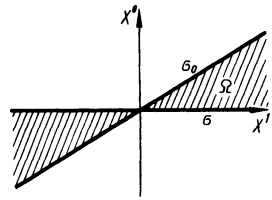


Рис. 20

2. Если $\rho > 1$, то траектория имеет вид $r = p_2 [\varepsilon_2 \operatorname{ch} \sqrt{\rho^2 - 1} (\alpha - \alpha_0) - 1]^{-1}$, где $\varepsilon_2 \equiv \rho^{-1} [1 + \mathcal{M}^2 c^4 (\rho^2 - 1)/E^2]^{1/2}$; $p_2 \equiv Kc(\rho^2 - 1)/(\rho E)$. В этом случае траектория закручивается вокруг начала координат. При $E < \mathcal{M}c^2$ движение финитно ($\varepsilon_2 > 1$), а при $E > \mathcal{M}c^2$ — инфинитно ($\varepsilon_2 < 1$).

88.2. Согласно (46.19), $P_E = -(dE)^{\text{нэл}}/d\zeta$, причем в мгновенно сопутствующей системе отсчета $P'_E = [2e^2/(3c^3)](du'/dt')^2$. Далее, $(dE)^{\text{нэл}} = \gamma(dE)^{\text{нэл}} + \gamma(\mathbf{u}d\mathbf{P}^{\text{нэл}}) = \gamma(dE)^{\text{нэл}}$, так как, согласно задаче 43.1, $d\mathbf{P}^{\text{нэл}} = 0$. С учетом равенства $dt' = dt = \gamma^{-1} d\zeta$, отсюда следует, что $P'_E = P_E$.

89.2. Используя (89.21), составим разность $\delta^\mu = \bar{\mathcal{P}}^\mu_{(t)} - \mathcal{P}^\mu_{(t)} = \frac{1}{c} \int (\bar{\Theta}^{0\mu} - \Theta^{0\mu}) \times dV = \frac{1}{c} \int \partial_i X^{i0\mu} dV$. Но так как $X^{i0\mu} = -X^{0i\mu}$, то $\alpha = i = 1, 2, 3$ и по теореме Гаусса — Остроградского с учетом островного характера системы имеем $\delta^\mu = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \oint_S n_i X^{i0\mu} dS = 0$. Очевидно, что для островной системы любой тензор K^{\dots} со свойством $K^{\lambda\tau\dots} = -K^{\tau\lambda\dots}$ удовлетворяет соотношению $\int \partial_\lambda K^{\lambda\mu\dots} d\sigma_\mu = 0$, где σ — пространственноподобная поверхность.

89.3. Циклически переставляем индексы: $X^{\alpha\mu\nu} = -X^{\mu\alpha\nu} = -X^{\mu\nu\alpha} = X^{\nu\mu\alpha} = X^{\nu\alpha\mu} = -X^{\alpha\nu\mu} = -X^{\alpha\mu\nu} = 0$.

89.4. Пусть $A^{\mu\nu} = 2^{-1}(\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu})$. Если $\Theta^{ik} = \Theta^{ki}$, то в любой системе отсчета $A^{ik} \equiv 0$, что возможно только при условии, что $A^{i0} \equiv 0$.

90.1. Запишем соотношение (90.2), считая, что электрон движется со скоростью \mathbf{v} , и выбирая в качестве поверхностей σ_1, σ_2 соответственно гиперплоскости $\sigma(x^0 = 0)$ и $\sigma_0[x^0 = (\mathbf{r}\mathbf{v})/c]$ (рис. 20), связанные друг с другом преобразованием Лоренца. С учетом (90.12) имеем

$$\mathcal{F}^\nu \equiv \int_\Omega f^\nu d\Omega = \int_\sigma \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu - \int_{\sigma_0} \Theta^{\mu\nu} d\sigma_\mu = 0.$$

В собственной системе отсчета электрона $f^\nu = -\partial_i \Theta^{i\nu}(\mathbf{r})$, т. е.

$$\mathcal{F}^\nu = \int dV \int_0^{(\mathbf{r}\mathbf{v})/c} dx^0 f^\nu(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \int (\mathbf{r}\mathbf{v}) \partial_i \Theta^{i\nu} dV = 0.$$

Предполагая систему островной (так как $E \sim r^{-2}$, $\hat{\Theta} \sim r^{-4}$ при $r \rightarrow \infty$), после интегрирования по частям находим $\mathcal{F}^\nu = \frac{v_i}{c} \int \Theta^{i\nu} dV = 0$, или $\int \Theta^{i\nu} dV = 0$, что эквивалентно (90.13), так как в собственной системе электрона $\int \Theta^{i0} dV = c\mathcal{P}^i_{(t)} = 0$.

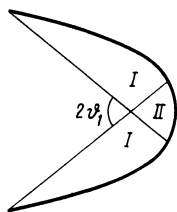


Рис. 21

90.2. Для электрона, движущегося со скоростью v , имеем:

$$\mathbf{B} = c^{-1} [\mathbf{vE}], \quad w = (1 + \beta^2 \sin^2 \vartheta) E^2 / (8\pi); \quad \mathbf{g} = [\mathbf{vE}^2 - \mathbf{E}(\mathbf{vE})] / (4\pi c^2),$$

где ϑ — угол между векторами $\mathbf{r} - \mathbf{vt}$ и \mathbf{v} . Считая электрон поверхностно заряженным эллипсоидом Хевисайда (модель Лоренца) $|\mathbf{r} - \mathbf{vt}| = a\gamma^{-1}(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{-1/2}$, поле \mathbf{E} определяем из (80.7). Интегрирование w и \mathbf{g} по объему дает: $E_f = (1 + \beta^2/3) e^2 \gamma / (2a)$; $\mathbf{P}_f = v 2e^2 \gamma / (3ac^2)$. В модели Абрагама напряженность поля рассчитывается более сложно и сводится к напряженности

поля эллипсоида*.

91.1. Порог реакции соответствует минимальной энергии системы, когда в системе центра масс все образовавшиеся частицы неподвижны. Запишем поэтому сохраняющуюся собственную массу системы до реакции в лабораторной системе, а после реакции — в системе центра масс: $[(E_1 + M_2 c^2)^2 - \mathbf{P}_1^2 c^2]^{1/2} = \sum_i M_i c^2$. Отсюда $T_0 = E_1 - M_1 c^2 = [c^2 / (2M_2)] \left[\left(\sum_i M_i \right)^2 - (M_1 + M_2)^2 \right]$.

91.2. Из закона сохранения 4-импульса $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4$ и условий $\mathcal{P}_i^2 = M_i^2 c^2$ выводим $\mathcal{P}_4^2 = M_4^2 c^2 = (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3)^2 = \sum_{i=1}^3 M_i^2 c^2 + 2[(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) - (\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_3) - (\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3)]$.

91.3. Если M' — собственная масса системы частиц M'_i , то полная энергия системы минимальна, когда частицы M'_i относительно неподвижны. Тогда $M' = \sum_i M'_i$ и реакцию можно представить в виде $M_1 + M_2 \rightarrow M_3 + M_4$, где $M_3 = 0$, $M_4 = M'$. Из тождества (91.17) выводим $c^2 E_1 M_2 - E_1 E + c P_1 E \cos \vartheta - E M_2 c^2 = (M'^2 - M_1^2 - M_2^2) c^4 / 2$, где ϑ — угол рассеяния фотона в лабораторной системе. Отсюда $\partial E_1 / \partial \vartheta = E \sin \vartheta (P_1 c)^2 [E E_1 \cos \vartheta + c P_1 (M_2 c^2 - E)]^{-1}$, т. е. минимальное значение E_1 соответствует углу $\vartheta = 0$, если $E E_1 + c P_1 (M_2 c^2 - E) > 0$, и углу $\vartheta = \pi$, если $c P_1 (M_2 c^2 - E) - E E_1 < 0$. В обоих случаях $\cos^2 \vartheta = 1$ и $(E P_1 c)^2 = [\lambda + E_1 (E - M_2 c^2)]^2$, где $\lambda \equiv (M'^2 - M_1^2 - M_2^2) c^4 / 2 + E M_2 c^2$. Корни этого уравнения относительно E_1 имеют вид (для $\lambda > 0$)

$$E_1^{\pm} = [M_2 c^2 (M_2 c^2 - 2E)]^{-1} \{ \lambda (M_2 c^2 - E) \pm E [\lambda^2 + M_2 M'^2 c^6 (2E - M_2 c^2)]^{1/2} \}.$$

Отсюда видно, что если $M_2 c^2 > 2E$, то $E_1^+ > E_1^- > \lambda / (M_2 c^2) > 0$, а если $2E > M_2 c^2$, то $E_1^- > \lambda / (M_2 c^2) > 0 > E_1^+$. Таким образом, $T_0 = E_1^- - M_1 c^2$.

92.1. Рассчитаем силу тяги двигателя в собственной системе звездолета. При подсчете импульса вылетающих фотонов следует иметь в виду, что по свойству параболического отражателя лучи, выходящие из фокуса, при отражении становятся параллельными. Область зеркала разобьем на две части: I — где отражаются все фотоны; II — где отражается половина фотонов (рис. 21). Замечая, что импульс фотона $\mathbf{P}'_v = \mathcal{M}_e c (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, и считая распределение рождающихся фотонов изотропным, в областях I и II имеем соответственно:

$$dP_I / dt' = -2P'_v N \cos \vartheta_1; \quad dP_{II} / dt' = -2^{-1} P'_v N (1 - \cos \vartheta_1 + 2^{-1} \sin^2 \vartheta_1),$$

где $\operatorname{tg} \vartheta_1 = 4aR / (R^2 - 4a^2)$. Поэтому сила тяги равна

* См.: Лоренц Г. А. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. Л.—М., 1934. С. 329.

$$F_{\tau} = -\frac{d}{dt}(P_I + P_{II}) = 2N \mathcal{M}_e c (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (R^4 - 8a^4 + 4a^2 R^2) / (R^2 + 4a^2)^2.$$

Чтобы составить уравнение движения звездолета, заметим, что сила тяги является инвариантом. Разделим импульс \mathbf{P} звездолета на две части: импульс корпуса \mathbf{P}_1 и горючего \mathbf{P}_2 , т. е. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$. Рассмотрим два близких момента времени t и $t + \Delta t$, выделив долю горючего, сгорающего к моменту времени $t + \Delta t$. Тогда из закона сохранения импульса имеем $\mathbf{P}^*(t) + \Delta \mathbf{P}_2^{(g)}(t) = \mathbf{P}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{P}_2^{(g)}(t + \Delta t)$, где, очевидно, $\mathbf{P}^*(t) = \mathcal{M}(t + \Delta t) \mathbf{U}$, $\mathbf{P}(t + \Delta t) = \mathcal{M}(t + \Delta t)(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U})$. Отсюда получаем уравнение движения $\mathcal{M}(t) d\mathbf{U}/dt = -d(\mathbf{P}_2^{(g)} - \mathbf{P}_2^{(g)})/dt = \mathbf{F}_{\tau} = \mathbf{F}'_{\tau}$. Полагая $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_0 - \alpha t$, где $\alpha = 2\mathcal{M}_e N (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, и интегрируя это уравнение с начальным условием $u(0) = 0$, находим:

$$u = c(\lambda - 1)/(\lambda + 1), \quad \lambda \equiv [\mathcal{M}_0 / (\mathcal{M}_0 - \alpha t)]^{\kappa}; \quad \kappa \equiv 2F_{\tau}/(\alpha c).$$

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. В цилиндрических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \alpha$, $x^3 = z$ (рис. 22) имеем: $\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_{\alpha r}$, $\mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_z$, $g_{ik} = \text{diag}[1, r^2, 1]$. В сферических координатах $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \alpha$ (рис. 23) имеем: $\mathbf{h}_1 = \mathbf{e}_r$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{e}_{\vartheta r}$, $\mathbf{h}_3 = \mathbf{e}_{\alpha r} \sin \vartheta$, $g_{ik} = \text{diag}[1, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta]$.

9. Запишем элемент объема в произвольных координатах: $dV = dx^1 dx^2 dx^3 = \mathcal{J} dx^1 dx^2 dx^3$, где $\mathcal{J} = |\partial_i f^k|$ — якобиан преобразования. Взяв детерминант от матричного соотношения (1П.14), находим $g = |g_{ik}| = |\partial_i f^j|^2 = \mathcal{J}^2$, т. е. $dV = g^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3$.

Закон преобразования ε_{ijk} вытекает из инвариантности элемента объема, построенного на трех векторах dx , dy , dz :

$$dV = (dx [dydz]) = \varepsilon'_{ijk} dx^i dy^j dz^k = \varepsilon'_{ijk} \partial_i f^j \partial_m f^k \partial_n f^l dx^l dy^m dz^n \equiv \varepsilon_{lmn} dx^l dy^m dz^n.$$

Таким образом, $\varepsilon_{lmn} = \partial_i f^j \partial_m f^k \partial_n f^l \varepsilon'_{ijk} = |\partial_k f^i| \varepsilon'_{lmn} = g^{1/2} \varepsilon'_{lmn}$. Аналогично получим $\varepsilon^{ijk} = g^{-1/2} \varepsilon'^{ijk} = g^{-1} \varepsilon_{ijk}$.

10. В произвольных координатах $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{h}_i (\text{rot } \mathbf{a})^i = h_i \varepsilon^{ijk} \partial_j a_k$.

11. Выведем (1П.25), исходя из декартовых координат: $\text{div } \mathbf{a} = \partial_i a^i = \partial_j (\partial_k f^i a^k) \partial x^j / \partial x^i = \partial_k a^k + a^k \partial_k \partial_j f^i \partial x^j / \partial x^i$.

Прямым дифференцированием якобиана \mathcal{J} убеждаемся, что $\mathcal{J}^{-1} \partial_k \mathcal{J} = \partial_k \partial_j f^i \partial x^j / \partial x^i$, так что $\text{div } \mathbf{a} = \mathcal{J}^{-1} \partial_k (\mathcal{J} a^k)$.

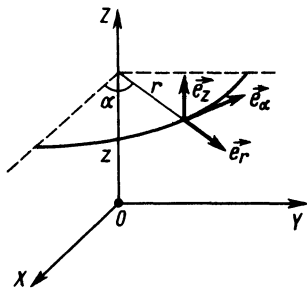


Рис. 22

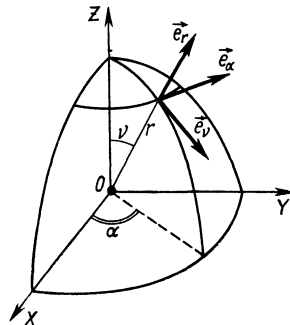


Рис. 23

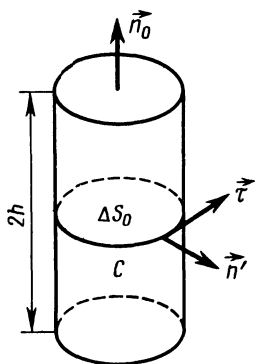


Рис. 24

13. $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3, \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0, \nabla(\mathbf{a} \mathbf{r}) = \mathbf{a}, \operatorname{rot}[\mathbf{a} \mathbf{r}] = 2\mathbf{a}, \nabla\varphi(\mathbf{r}) = \varphi' \mathbf{n}, \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mathbf{n} \mathbf{A}'), \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = [\mathbf{n} \mathbf{A}'], \mathbf{n} = \mathbf{r}/r.$

14. Запишем соотношение (2П.5а) для цилиндра (рис. 24):

$$\nabla\varphi = \frac{1}{2h\Delta S_0} \oint_S \mathbf{n}\varphi dS = \frac{1}{\Delta S_0} \int_C \mathbf{n}'\varphi dl + \mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0 \nabla)\varphi.$$

Отсюда после векторного умножения на \mathbf{n}_0 и следует (2П.8а). Аналогично, (2П.8б) вытекает из (2П.5в):

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{2h\Delta S_0} \oint_S [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS = \frac{1}{\Delta S_0} \oint_C [\mathbf{n}' \mathbf{a}] dl + [\mathbf{n}_0 \dots]$$

после скалярного умножения на \mathbf{n}_0 . Заметим, что если в (2П.8б) положить $\mathbf{a} = \mathbf{c}\varphi$, где \mathbf{c} — постоянный вектор, то получается (2П.8а). Поэтому теоремой Стокса обычно называют только соотношение (2П.8б).

16. Условия существования решений: $\operatorname{rot} \mathbf{e} = 0, \operatorname{div} \mathbf{b} = 0.$

17. В произвольных ортогональных координатах

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^3 (h_1 h_2 h_3)^{-1} \partial_i (h_1 h_2 h_3 h_i^{-2} \partial_i \varphi).$$

19. $\Delta_a \varphi(\mathbf{r}) = \frac{3}{8\pi a^3} \int_{V_a} (\xi \nabla)^2 \varphi(\mathbf{r}) dV_\xi + O(a^4) = 0, 1a^2 \Delta\varphi(\mathbf{r}) + O(a^4).$

20. Допустим, что гармоническая функция φ принимает максимальное значение φ_0 в некоторой внутренней точке O . Рассмотрим шар малого радиуса a с центром в этой точке. Среднее уклонение φ в этом шаре $\Delta_a \varphi = O(a^4)$, в то время как $\varphi(a) - \varphi_0 = O(a^2)$. Поэтому внутри шара найдутся как точки, где $\varphi < \varphi_0$, так и точки, где $\varphi > \varphi_0$, что противоречит исходному допущению.